Algebra vettoriale

Leggi della Fisica → Grandezze fisiche

- Scalari: temperatura, massa, tempo
- Vettoriali: velocità, accelerazione,forza

Le grandezze scalari sono rappresentate da un numero (e una unità di misura)

Le grandezze vettoriali sono rappresentate da un vettore (e una unità di misura)

Un vettore è caratterizzato da:

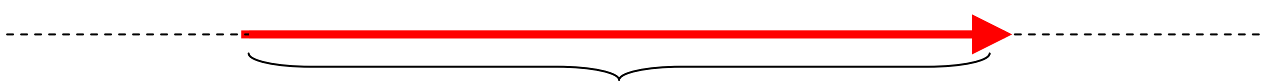
Modulo

Direzione

Verso

Direzione

Verso



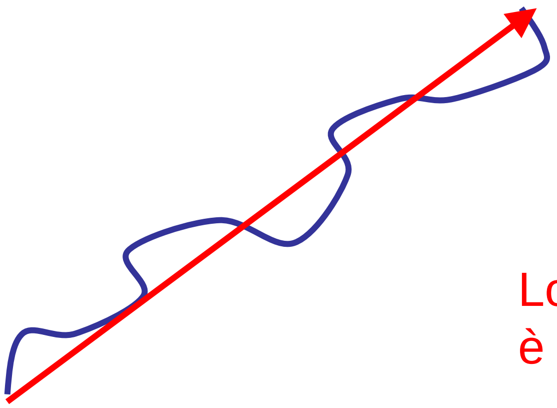
Modulo

I vettori sono applicati in un punto.
Esiste un numero infinito di vettori equipollenti, cioè con modulo, direzione e verso uguali, ma applicati in punti diversi.
Fisicamente il punto di applicazione è rilevante.

Esempi

1) Movimento in 2 dimensioni

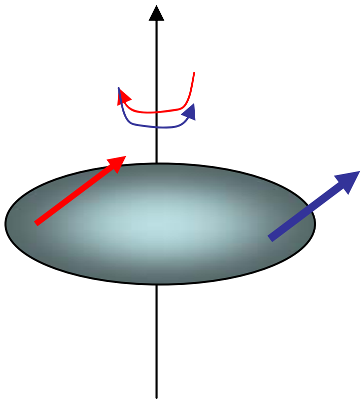
Un’automobile sale su un cammino di montagna



La lunghezza del cammino percorso è una grandezza scalare

Lo spostamento effettivo dell’auto è una grandezza vettoriale

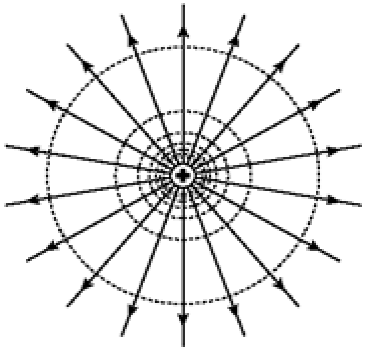
2) Effetto del punto di applicazione



Campi vettoriali

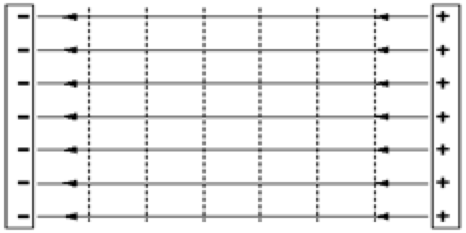
Campo vettoriale: una regione dello spazio, ad ogni punto della quale può essere associato un vettore; campo vettoriale è anche l'insieme di tali vettori.

Es: Campo elettrico,
campo gravitazionale



carica puntiforme

I campi, in ogni punto dei quali i vettori sono uguali, si dicono campi uniformi.



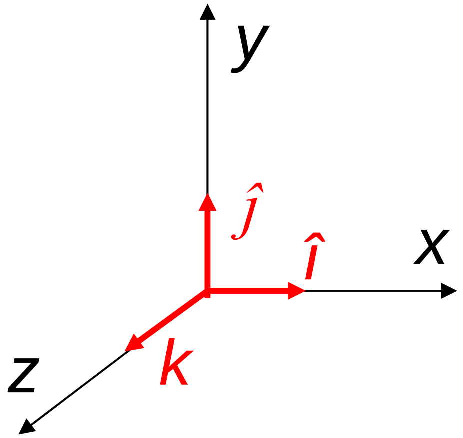
I campi in cui i vettori (pur diversi) si mantengono inalterati nel tempo si dicono campi stazionari.

Versori

Un versore è un vettore di modulo unitario.

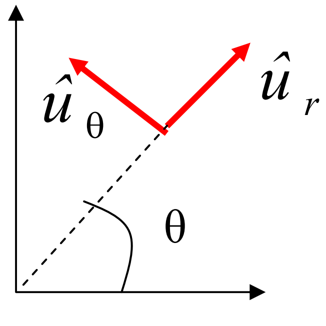
Vengono utilizzati per determinare particolari direzioni e versi

Nel sistema cartesiano destrorso:



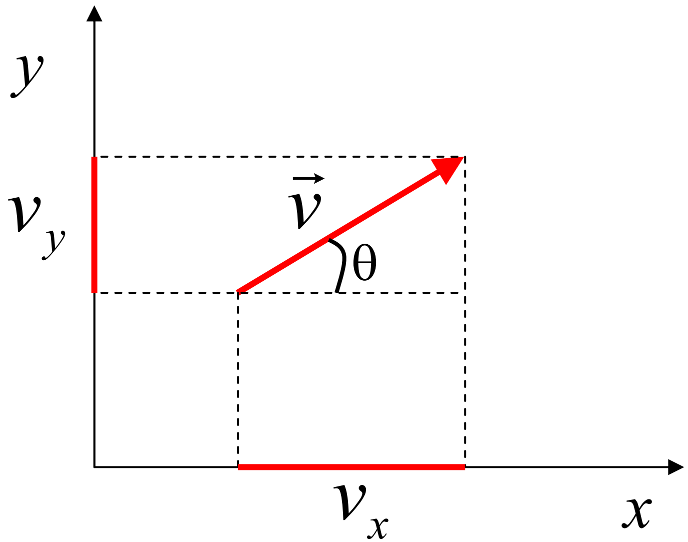
altra notazione: $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$

In coordinate polari:



Scomposizione di un vettore

Consideriamo un piano cartesiano:



$$\boxed{\vec{v} = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y}$$

$$\boxed{\vec{v} = (v_x, v_y)}$$

modulo: $$\boxed{|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

direzione e verso: $$\boxed{\mathrm{tg}\,\theta = \frac{v_y}{v_x}}$$

Nello spazio:

$$\boxed{\vec{v} = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y + v_z \hat{u}_z = (v_x, v_y, v_z)}$$

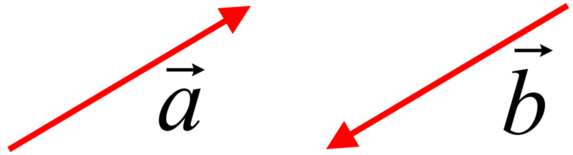
$$\boxed{|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

Proprietà dei vettori

Prodotto di un vettore per uno scalare: $\boxed{\vec{b} = m\vec{a}}$

se $m = -1$ $\Rightarrow$ $\vec{b} = -\vec{a}$

(vettore opposto)



Somma di vettori: proprietà

$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$$

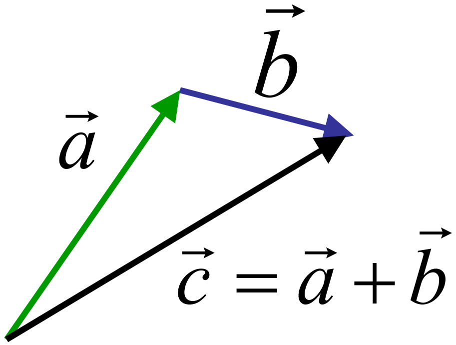
proprietà commutativa

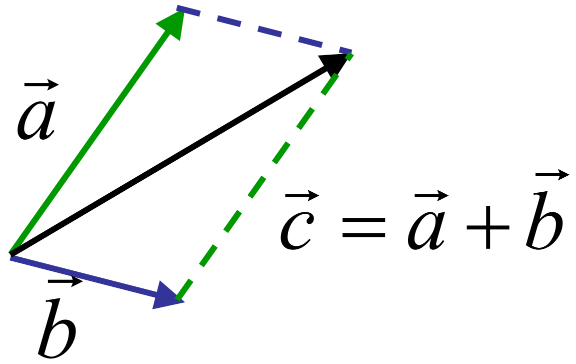
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

proprietà associativa

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

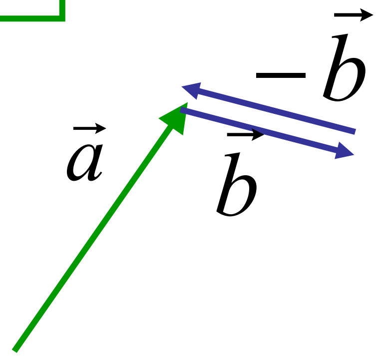
Somma di vettori: metodo grafico

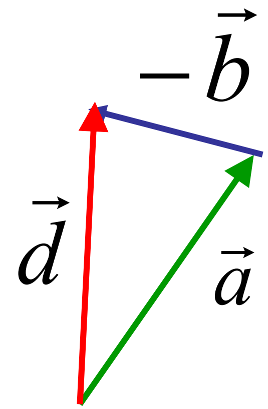


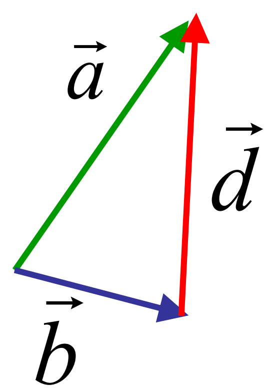


Differenza tra vettori

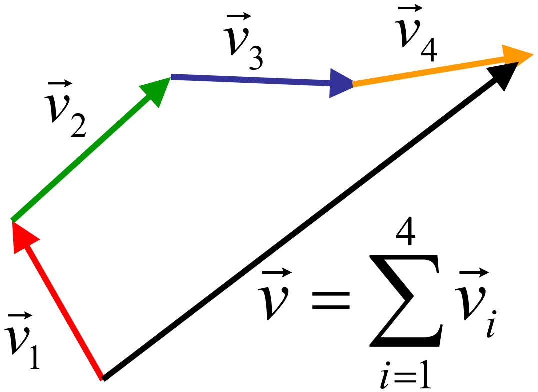
$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = a + (-\vec{b}\,)$$



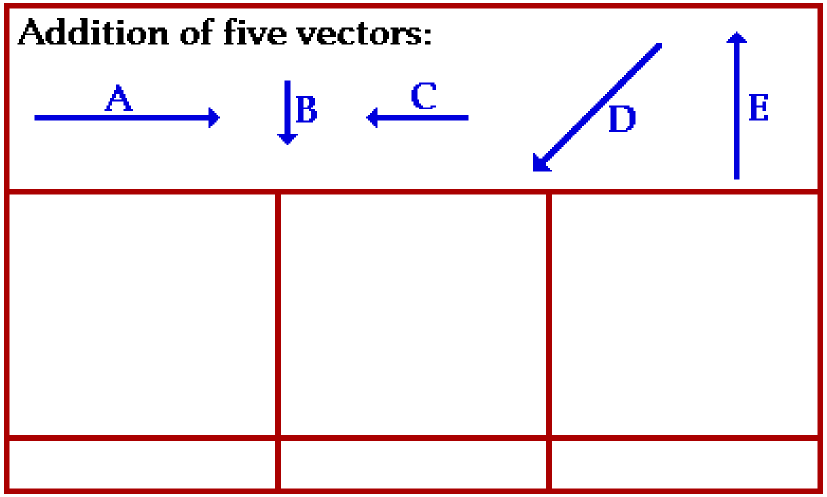




Somma di più vettori



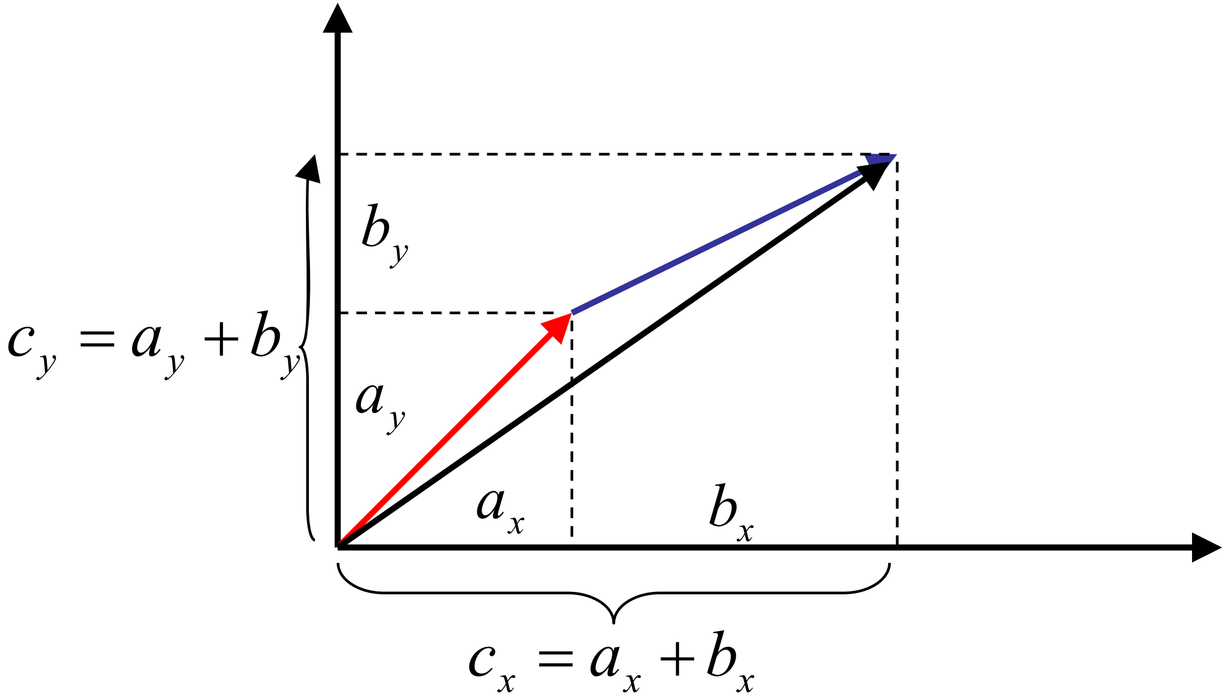
$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{4} \vec{v}_i$$



Somma di vettori in coordinate cartesiane

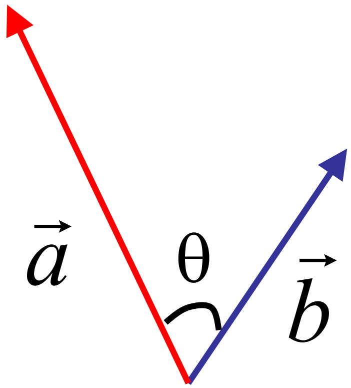
$$\vec{a} = a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y \qquad \vec{b} = b_x \hat{u}_x + b_y \hat{u}_y$$

$$\boxed{\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \left(a_x + b_x\right)\hat{u}_x + \left(a_y + b_y\right)\hat{u}_y}$$



Facilmente generalizzabile a più vettori e a più dimensioni

Prodotto tra vettori: prodotto scalare



$$\boxed{s = \vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b \cos\theta}$$

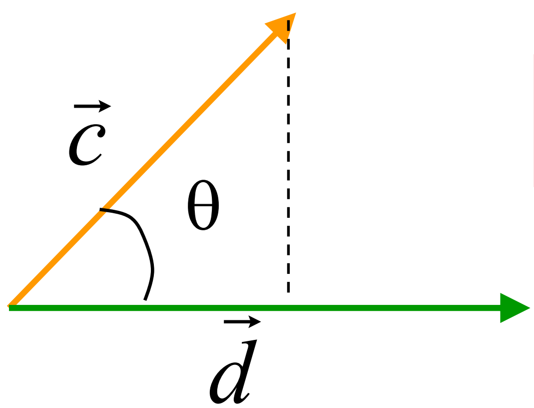
è uno scalare!a

Si può anche calcolare utilizzando la forma:

$$s = \vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y + a_z \hat{u}_z\right) \cdot \left(b_x \hat{u}_x + b_y \hat{u}_y + b_z \hat{u}_z\right)$$

$$= a_x b_x \hat{u}_x \cdot \hat{u}_x + a_y b_y \hat{u}_y \cdot \hat{u}_y + a_z b_z \hat{u}_z \cdot \hat{u}_z$$

$$\boxed{s = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$



$$\boxed{s = \vec{c} \cdot \vec{d} = \left(c \cos\theta\right) d = c \left(d \cos\theta\right)}$$

Il prodotto scalare tra due vettori è uguale al prodotto del modulo di uno per la proiezione su di questo dell’altro vettore

Proprietà del prodotto scalare

1) il prodotto scalare di due vettori è uno scalare
2) è nullo non solo se uno dei vettori è nullo ma anche se i due vettori sono perpendicolari
3) vale la proprietà commutativa:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = a\,b\cos\theta}$$

4) il prodotto scalare di un vettore per se stesso è uguale al quadrato del suo modulo:

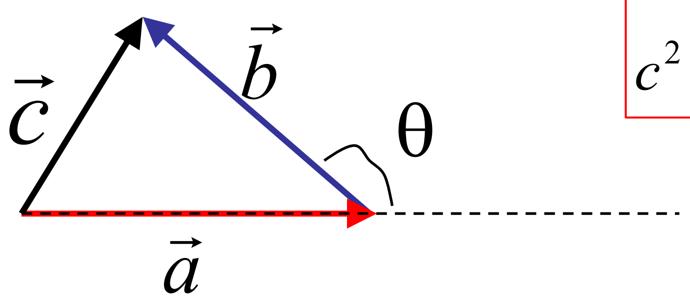
$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2 = a^2}$$

5) vale la proprietà distributiva:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\overleftarrow{d}}$$

6) Teorema di Carnot o del coseno:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}\\
&c^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = a^2+b^2+2\,a\,b\cos\theta\\
&c^2 = a^2+b^2+2\,\vec{a}\cdot\vec{b}
\end{aligned}}$$



Prodotto vettoriale

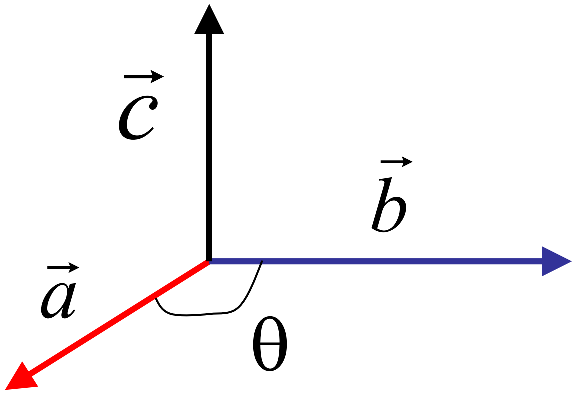
Il prodotto vettoriale è un vettore

$$\boxed{\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}}$$

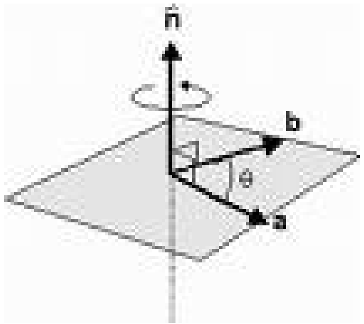
1) modulo: $\boxed{c = a\,b \sin\theta}$

e coincide con l'area del parallelogramma di lati *a* e *b*

2) direzione: perpendicolare al piano individuato dai due vettori



3) verso: quello di una normale vita destrogira: ruotando da *a* a *b* nel verso della vite, il verso di *c* è indicato dalla punta della vitea



Prodotto vettoriale: proprietà

1) il prodotto vettoriale è un vettore

2) il prodotto vettoriale è anticommutativo:

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}}$$

3) il risultato è nullo se uno dei vettori è nullo e anche se i vettori sono paralleli

4) vale la proprietà distributiva:

$$\boxed{\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \overleftarrow{d}}$$

5) NON vale la proprietà associativa:

$$\boxed{\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \neq \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}}$$

In particolare:

$$\vec{u}_x \times \vec{u}_x = 0 \qquad \vec{u}_y \times \vec{u}_y = 0 \qquad \vec{u}_z \times \vec{u}_z = 0$$

$$\vec{u}_x \times \vec{u}_y = \vec{u}_z \qquad \vec{u}_y \times \vec{u}_z = \vec{u}_x \qquad \vec{u}_z \times \vec{u}_x = \vec{u}_y$$

prodotto vettoriale in coordinate cartesiane

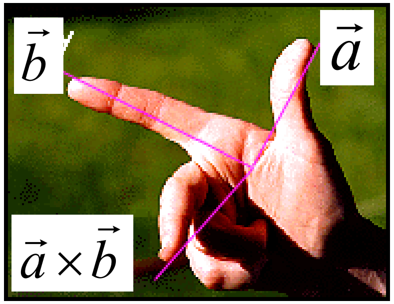
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y + a_z \hat{u}_z$$

$$\vec{b} = b_x \hat{u}_x + b_y \hat{u}_y + b_z \hat{u}_z$$

Il prodotto vettoriale viene definito dal determinante:

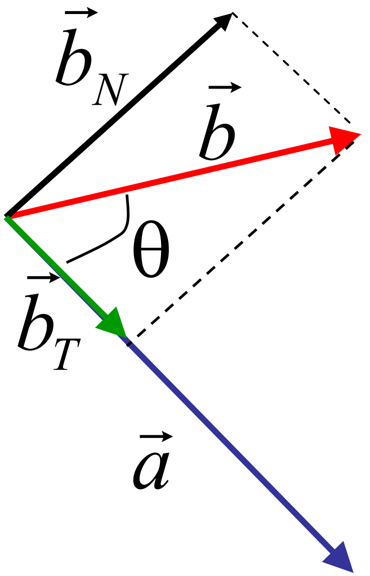
$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



regola della mano destra

$$\boxed{\vec{c} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\hat{u}_x + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\hat{u}_y + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\hat{u}_z}$$

Prodotto scalare e prodotto vettoriale



Prodotto scalare

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b \cos\theta = a b_T}$$

Prodotto vettoriale

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_N + \vec{a} \times \vec{b}_T = \vec{a} \times \vec{b}_N}$$