Teoria degli errori

Processo di misura → definisce una grandezza fisica

1. Sistema oggetto
2. Apparato di misura
3. Sistema di confronto

La misura implica un giudizio sull'uguaglianza tra la grandezza incognita e la grandezza campione

Metodo di misura:
- Misure dirette: lunghezza, tempo
- Misure indirette: velocita'

Sensibilita' di uno strumento: la minima differenza apprezzabile tra il valore della grandezza da misurare e quella campione.

$$8 < x < 9 \quad \Rightarrow \quad x = (8.5 \pm 0.5) \cdot [\text{unita' di misura}]$$

NON HA SENSO RIPORTARE IL RISULTATO DI UNA MISURA INDICANDO UN NUMERO DI CIFRE DECIMALI MAGGIORE DI QUELLO NECESSARIO PER INDICARE LA SENSIBILITA' DELLA MISURA

Classificazione degli errori di misura

Ogni misura e' affetta da errori e di conseguenza
il "valore vero" di una grandezza non e' mai noto.

Classificazione degli errori:

- Errori sistematici: falsano la misura sempre nello stesso senso
  (strumento difettoso, calibrazione sbagliata, ecc.).

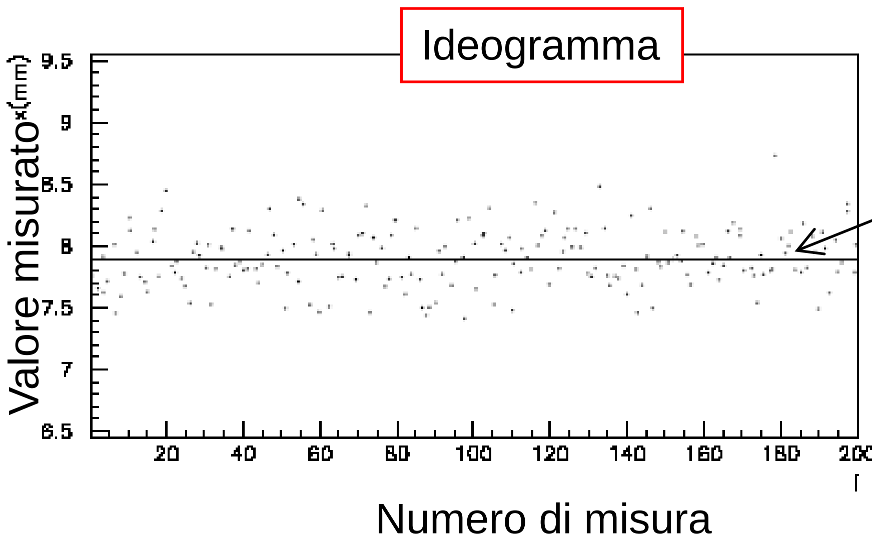
  Opportune correzioni a posteriori.

- Errori casuali: dovuti a condizioni sperimentali fluttuanti (temperatura)
  disturbi estranei alla misura (vibrazioni)
  definizione vaga della grandezza a misurare.

  Diminuiscono ripetendo la misura molte volte

Media Aritmetica

N misure di una grandezza fisica x con lo stesso strumento e in condizioni sperimentali identiche $x_1, x_2, \dots, x_N$



Valore medio

Errore della singola misura: $\varepsilon_i = x_i - x^*$

Valore vero

Media aritmetica: $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

Errore di $\bar{x}$

$$\varepsilon(\bar{x}) = \bar{x} - x^* = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i - x^* \right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i - x^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i$$

Cancellazioni parziali

Scarti dalla media

La media aritmetica da' una stima del valore vero che puo' essere considerata piu' accurata del valore x_i di una grandezza misurata tra le N eseguite

Per conoscere l'accuratezza della media aritmetica, bisogna conoscere l'accuratezza delle singole misure perche' $\varepsilon_i = x_i - x^*$ non puo' essere calcolato

⇒ se $\bar{x}$ e' una buona stima di x^*
allora $z_i = x_i - \bar{x}$ e' una buona stima di ε_i

Scarto dalla media:

$$\boxed{\bar{z} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 0}$$

Bisogna trovare una somma di numeri positivi!!!

Varianza

$$\boxed{S = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Per ritrovare una grandezza omogenea con x

Scarto quadratico medio:

$$\boxed{\mu = \sqrt{S} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}}$$

Varianza

Il valore piu' probabile (media aritmetica) minimizza la varianza

$$\frac{d}{d\overline{x}} S = \frac{d}{d\overline{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} z_i^2 = \frac{d}{d\overline{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} 2(x_i - \overline{x}) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i = \overline{x}}$$

La varianza si puo' scrivere piu' semplicemente:

$$\boxed{\begin{aligned} S &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2\overline{x} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i + \frac{1}{N} N\overline{x}^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 \end{aligned}}$$

Distribuzione degli errori casuali

Densita' di probabilita': funzione che permette di calcolare la probabilita' di ottenere un risultato contenuto in un generico intervallo (x, x+Δx)

Se Δx → 0 la probabilita' e' proporzionale a Δx

$$P_{[x,x+dx]} = P(x)\, dx$$

densita' di probabilita'

Probabilita' di ottenere un risultato in un intervallo finito:

$$P_{[x_1,x_2]} = \int_{x_1}^{x_2} P(x)dx$$

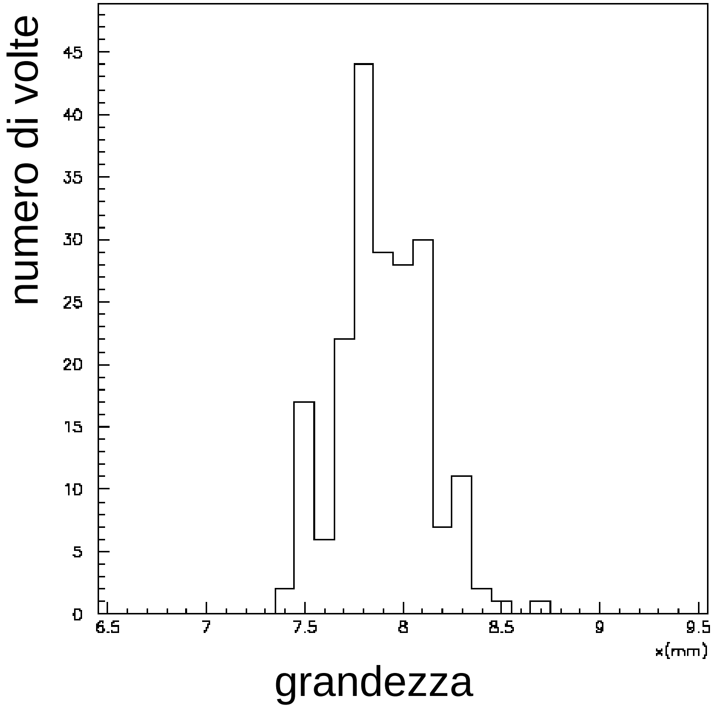
$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)dx = 1$$

Il numero di misure che si prevede diano un risultato compreso tra x_1 e x_2:

$$N(x_1 \leq x \leq x_2) = N \int_{x_1}^{x_2} P(x)dx$$

Distribuzione degli errori

Istogramma



valore atteso

$$< x >= \int_{-\infty}^{+\infty} x \; P(x) \; dx$$

varianza

$$S =< x^2 > - < x >^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - < x >)^2 P(x) dx$$

Distribuzione normale o gaussiana

Ripetendo molte volte la misura di una grandezza x i valori ottenuti sono meno frequenti quando gli scarti dalla media sono piu' grandi.

La distribuzione risulta approssimativamente simmetrica rispetto alla media stessa

Misure indipendenti: il risultato di una misura non e' condizionato da quello delle misure precedenti.

La funzione analitica che descrive la densita' di probabilita' e':

$$\boxed{P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x^*)^2}{2\sigma^2}}}$$

$P(x)$ e' massima in $x = x^*$

$P(x) \to 0$ se $x \to \pm\infty$

larghezza proporzionale a σ

$< x >= x^*$

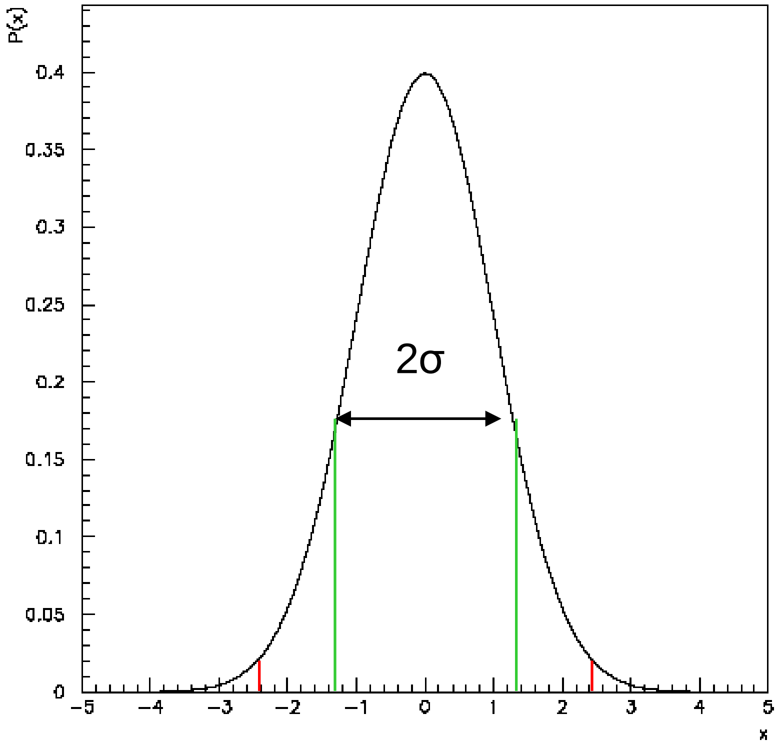
$< x^2 > - < x >^2 = \sigma^2$

Distribuzione normale o gaussiana

$$\int_{x^*-\sigma}^{x^*+\sigma} P(x)dx = 68.3\%$$

$$\int_{x^*-2\sigma}^{x^*+2\sigma} P(x)dx = 95.5\%$$

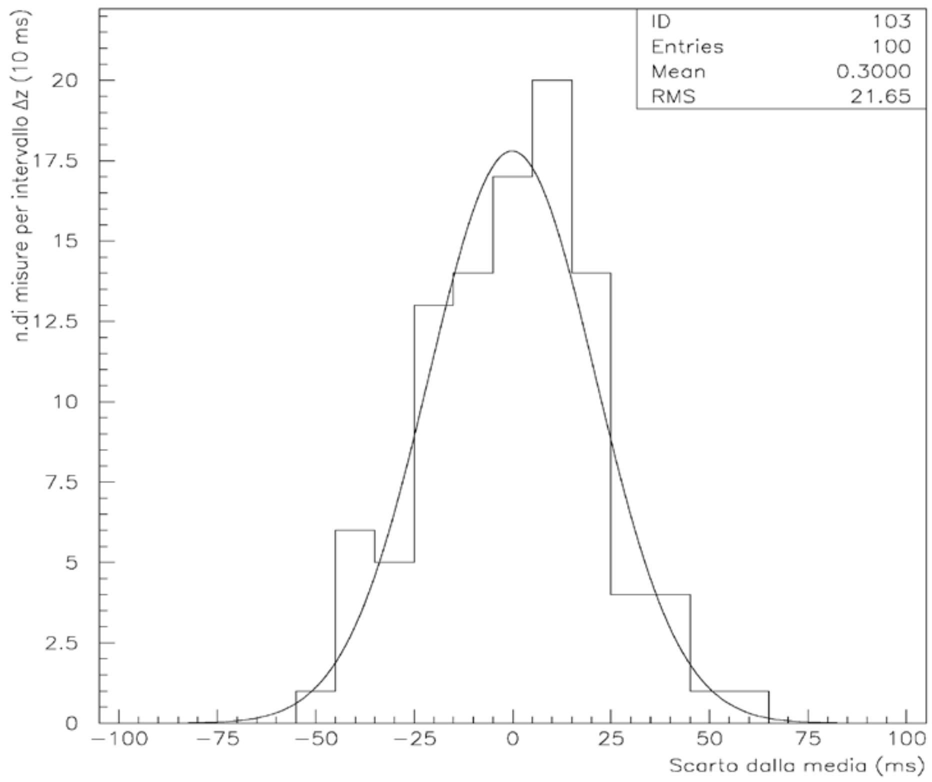
$$\int_{x^*-3\sigma}^{x^*+3\sigma} P(x)dx = 99.7\%$$



Confronto con l'istogramma

Per il confronto con l'istogramma:

$$N(x) = \frac{N\ \Delta x}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-x^*)^2}{2\sigma^2}}$$



Propagazione degli errori

Misure indirette

L'errore nella misura indiretta di una grandezza viene ottenuto a partire degli errori di misura delle grandezze di base.

Lo scarto quadratico medio di una grandezza $F\left(x_1,\ldots,x_i,x_j,\ldots,x_N\right)$ (sara' dedotta a lezione) risulta:

$$\mu_F^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 \mu_i^2 + 2\sum_{i<j}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j}\rho_{ij}\mu_i\mu_j$$

dove μ_i rappresentano gli errori di misura delle grandezze di base e

ρ_{ij} e' il coefficiente di correlazione

Propagazione degli errori relativi

Esempio: $\boxed{v = \dfrac{x}{t}}$ $\qquad \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{t} \qquad \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{x}{t^2}$

Lo scarto quadratico medio di *v* e':

$$\boxed{\mu_v^2 = \left(\frac{1}{t}\right)^2 \mu_x^2 + \left(\frac{x}{t^2}\right)^2 \mu_t^2}$$

Dividendo entrambi i membri per v^2

si ottiene:

$$\boxed{\left(\frac{\mu_v}{v}\right)^2 = \left(\frac{\mu_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\mu_t}{t}\right)^2}$$

Legge di propagazione degli errori relativi

In generale, se la grandezza F e' data da un prodotto di grandezze di base:

$$F\left(x_1,\ldots,x_i,x_j,\ldots,x_N\right)=\prod_{i=1}^{N} x_i^{c_i}$$

$$\boxed{\left(\frac{\mu_F}{F}\right)^2=\sum_{i=1}^{N} c_i^2\left(\frac{\mu_{x_i}}{x_i}\right)^2}$$

Interpolazione lineare

Siano x e y due grandezze fisiche misurate, legate da una relazione di tipo lineare:

$$y = a + bx$$

parametri *a* e *b* da determinare in modo di dare la migliore interpolazione lineare dei valori misurati $\left(x_i , y_i\right)$

La stima risulta semplice se si verificano le seguenti condizioni:

1. le misure delle grandezze *x* e *y* sono affette da errori indipendenti
2. gli errori su *x* sono trascurabili
3. gli errori su *y* seguono la distribuzione normale

$x_i - x_i^*$ trascurabili

$\delta y_i = y_i - \left(a + bx_i\right)$ distanza tra il valore “vero” e quello misurato

La migliore stima di *a* e *b* si ottiene minimizzando gli scarti $Q = \sum_{i=1}^{n} \delta y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a - bx_i\right)^2$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial a} &= -2\sum_{i=1}^{n} y_i - a - bx_i = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b} &= -2\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - a - bx_i) = 0 \end{aligned}}$$

Metodo dei minimi quadrati

I parametri *a* e *b* si ottengono con le seguenti espressioni

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \\
b &= \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \; .
\end{aligned}
$$

E gli errori si possono ottenere con le formule di propagazione degli errori

$$
\begin{aligned}
S_{aa} = \sigma_y^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\right)^2 = \sigma_a^2 &= \sigma_y^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\
S_{ab} = \sigma_y^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\right)\left(\frac{\partial b}{\partial y_i}\right) &= -\sigma_y^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\
S_{bb} = \sigma_y^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial b}{\partial y_i}\right)^2 = \sigma_b^2 &= \sigma_y^2 \frac{n}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}
\end{aligned}
$$

Media pesata

Se le diverse misure non sono eseguite con la stessa precisione,
al posto della media aritmetica si può calcolare il valore più probabile
dando un peso diverso a ogni misura.

Media pesata

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}}$$

Peso

$$a_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

Errore della media

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

L'errore della media risulta minore di tutti gli errori delle singole misure

Prima esperienza di Laboratorio

Moto di una slitta nella guidovia

a. Preparazione della postazione:
   i. collegare il banco alla rete elettrica
   ii. accendere il computer e il compressore
   iii. verificare la posizione orizzontale della guidovia
   iv. verificare la posizione del sonar
b. Prima misura: moto rettilineo uniforme
   i. misurare velocità in funzione del tempo per 5 volte spingendo la slitta verso il magnete (delicatamente!). Stimare l’angolo di inclinazione della guidovia e rimetterla in posizione orizzontale.
   ii. misurare posizione della slitta in funzione del tempo lanciandola col magnete. Verificare l’andamento lineare
   iii. ripetere la misura 5 volte e riportare i risultati dell’interpolazione sul foglio di calcolo per vedere la dispersione della velocità
   iv. aggiungere un disco metallico alla slitta e studiare l’azione del magnete
c. Seconda misura: moto uniformemente accelerato
   i. inclinare il piano della guidovia verso il sonar (1 giro=5’)
   ii. misurare l’accelerazione per 5 inclinazioni diverse (1/2 giro per volta)
   iii. riportare i valori nel foglio di calcolo e verificare se l’accelerazione è solo dovuta alla forza peso

Studio dell'azione del magnete (1)

Si agisce con il magnete su un carrello con due masse diverse (per esempio aggiungendo uno dei dischi metallici a disposizione).
Le masse sono $m_{carrello} = 78\ g$, $m_{ottone} = 78\ g$, $m_{alluminio} = 30\ g$ da considerare senza errore.

Trascurando l'effetto della forza di attrito viscoso durante la spinta si hanno due possibilità

Se l'impulso della forza magnetica è costante

$$I = m_0 v_0 = mv$$

$$\frac{m}{m_0} = \frac{v_0}{v}$$

Se il lavoro della forza magnetica è costante

$$W = \frac{1}{2} m_0 v_0^2 = \frac{1}{2} mv^2$$

$$\frac{m}{m_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^2$$

Studio dell'azione del magnete (2)

Errori (solo statistici)

$$\sigma_{\nu_0/\nu} = \frac{\nu_0}{\nu}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\nu_0}}{\nu_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\nu}{\nu}\right)^2}$$

$$\sigma_{(\nu_0/\nu)^2} = 2\left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\nu_0}}{\nu_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\nu}{\nu}\right)^2}$$

Derivazione delle formule degli errori per i due casi presentati

$$f = \frac{\nu_0}{\nu}$$

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \nu_0}\sigma_{\nu_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \nu}\sigma_\nu\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\nu_0}}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{\nu_0}{\nu^2}\sigma_\nu\right)^2} = \frac{\nu_0}{\nu}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\nu_0}}{\nu_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\nu}{\nu}\right)^2}$$

$$f = \left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2$$

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \nu_0}\sigma_{\nu_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \nu}\sigma_\nu\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2\nu_0}{\nu^2}\sigma_{\nu_0}\right)^2 + \left(\frac{2\nu_0^2}{\nu^3}\sigma_\nu\right)^2} = 2\left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\nu_0}}{\nu_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\nu}{\nu}\right)^2}$$

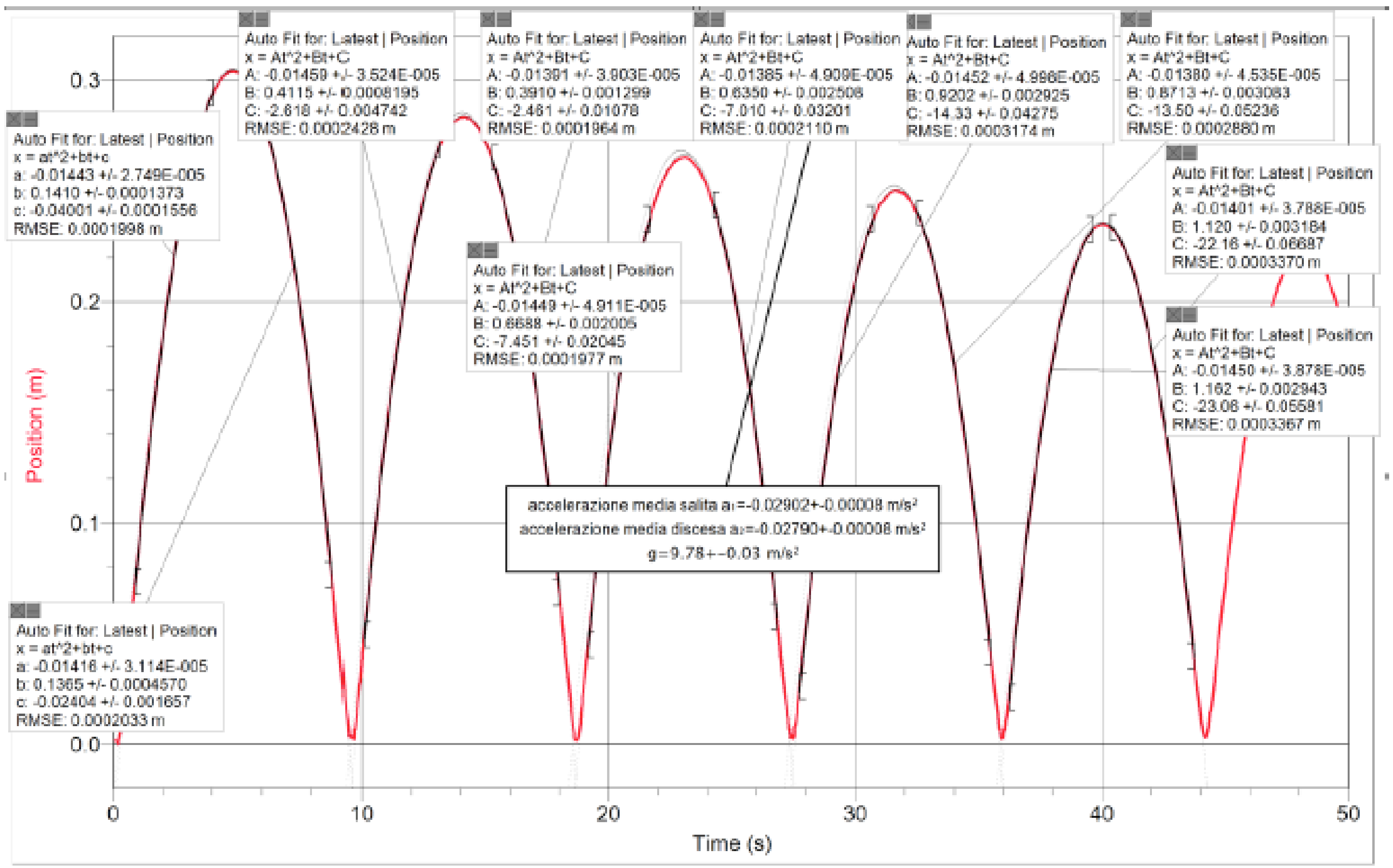
Materiale per il laboratorio

http://www.pd.infn.it/~zotto/laboratorio/lab_studenti.html

Seconda esperienza di Laboratorio

a. Preparazione della postazione:
   i. collegare il banco alla rete elettrica
   ii. accendere il computer e il compressore
   iii. verificare la posizione orizzontale della guidovia
   iv. verificare la posizione del sonar
b. Prima misura:
   i. inclinare la guidovia verso il sensore di forza (che sostituisce il magnete) di 10’ e, utilizzando la slitta con la molla verso il sensore di forza, spingerla delicatamente verso il sensore di modo che rimbalzi.
   ii misurare posizione della slitta in funzione del tempo e calcolare l’accelerazione in discesa e in salita.
   iii ripetere la misura 5 volte e riportare i risultati sul foglio di calcolo con il loro errore. Calcolare la media pesata
   iv. calcolare il valore di g e della forza d’attrito media con i loro errori

Seconda esperienza di Laboratorio



Seconda esperienza di Laboratorio

Le equazioni del moto in discesa e in salita sono

$$\begin{cases} ma_D = -F_{attr}^{(D)} + mg\sin\theta \\ ma_S = F_{attr}^{(S)} + mg\sin\theta \end{cases}$$

$$\sin\theta = \frac{a_D + a_S}{2g} \quad \Rightarrow \quad \theta \approx \frac{a_D + a_S}{2g}$$

$$\begin{cases} g = \dfrac{a_D + a_S}{2\theta} \\ F_{attr}^{(media)} = \dfrac{m}{2}\left|a_D - a_S\right| \end{cases}$$

Slittarimbalzi.xls

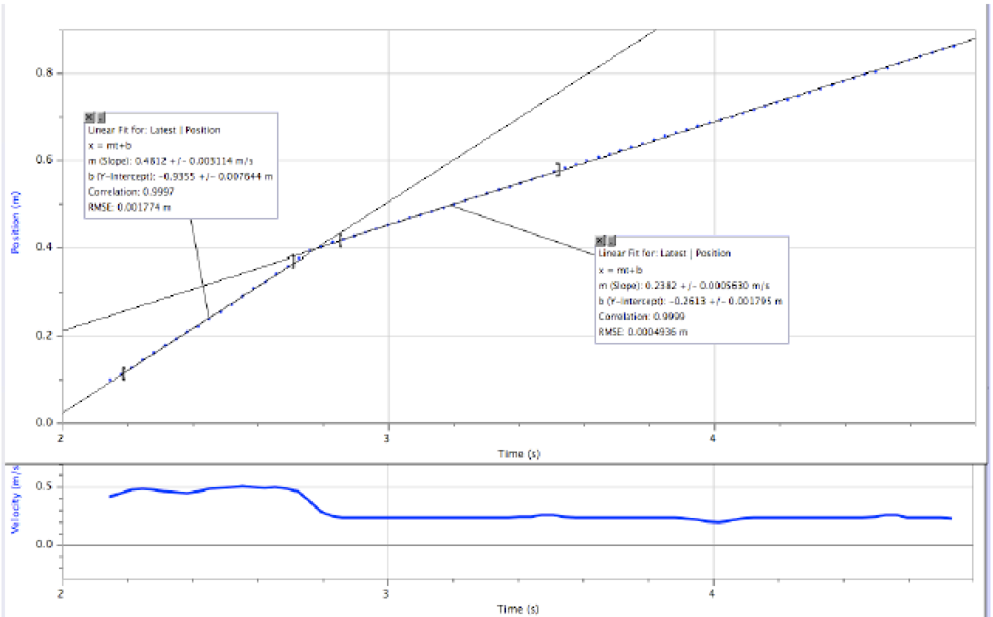
	A	B	C	D	E
1		Discesa		Salita	
2	Misura	A	errore	A	errore
3	1	1.44E-02	2.74E-05	1.42E-02	3.11E-05
4	2	1.46E-02	3.52E-05	1.39E-02	3.90E-05
5	3	1.45E-02	4.91E-05	1.39E-02	4.90E-05
6	4	1.45E-02	5.00E-05	1.38E-02	4.54E-05
7	5	1.45E-02	3.87E-05	1.40E-02	3.79E-05
8					
9	Media pesata	1.45E-02	1.66E-05	1.40E-02	1.74E-05
10					
11					
12	Valore di g	9.7912	±	8.28E-03	
13	Forza di attrito media	7.95E-05	±	3.76E-06	
14					

Seconda esperienza di Laboratorio

Moto di una slitta nella guidovia e urti

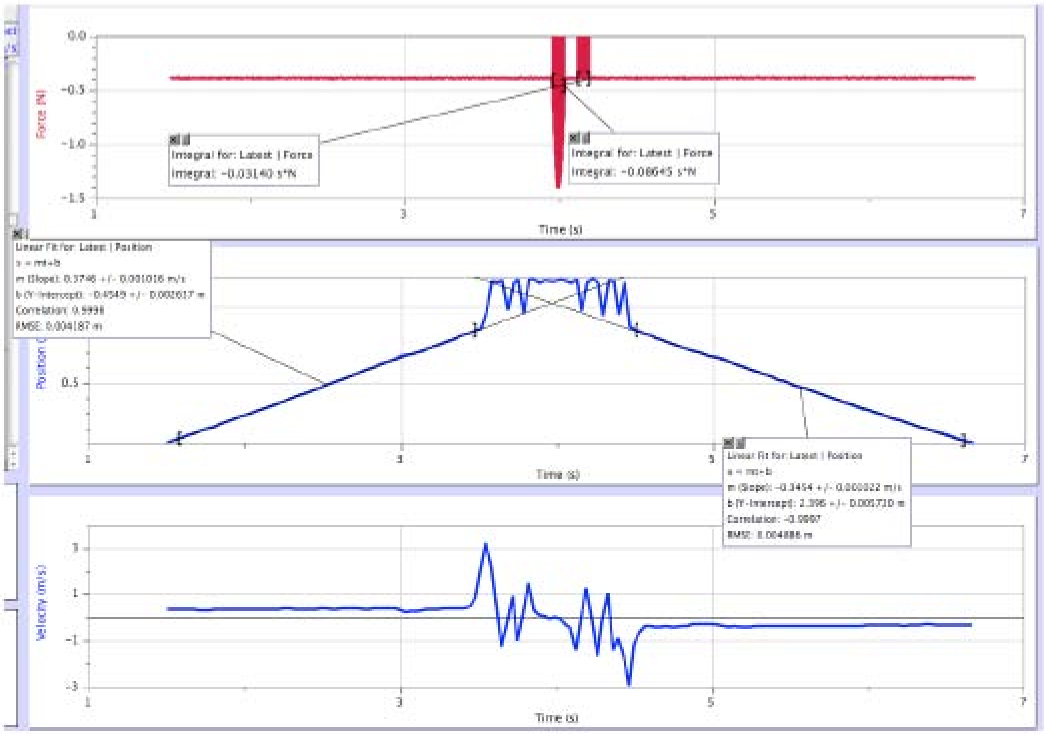
c. Seconda misura: urti
   i. riportare la guidovia in posizione orizzontale
   ii. urto perfettamente anelastico: utilizzando le slitte con il velcro, mantenere una ferma e spingere l’altra dal sonar verso la prima slitta che viene rilasciata un attimo prima dell’urto. Misurare la velocita’ prima e dopo l’urto e verificare la conservazione della quantita’ di moto.
   iii. urto elastico: ripetere il punto ii) utilizzando una siltta con la molla.
   iv. urto elastico (lento): spingere la slitta con la molla verso il sensore di forza. Verificare la relazione tra l’impulso della forza e la quantita’ di moto nel foglio di calcolo e stimare la durata dell’urto. Il fondoscala del sensore di forza viene posto a 10N.
   iv. urto anelastico (istantaneo): utilizzando la slitta con la barretta di diametro maggiore si ripete il punto precedente e si stima la durata dell’urto

Urto perfettamente anelastico

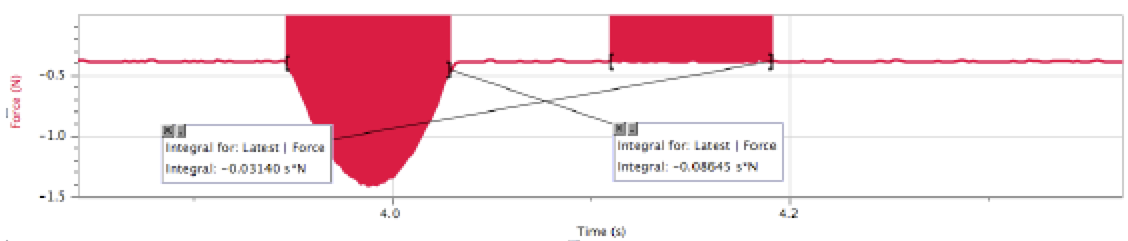


1	Urto perfettamente anelastico fra slitte				
2					# sigma(dev std)
3	V iniziale (m/s)	0.481200	±	0.003114	
4	V finale (m/s)	0.238200	±	0.000563	
5	V finale attesa (r	0.240600	±	0.001557	
6	Differenza (m/s)	-0.002400	±	0.001656	-1.449570874

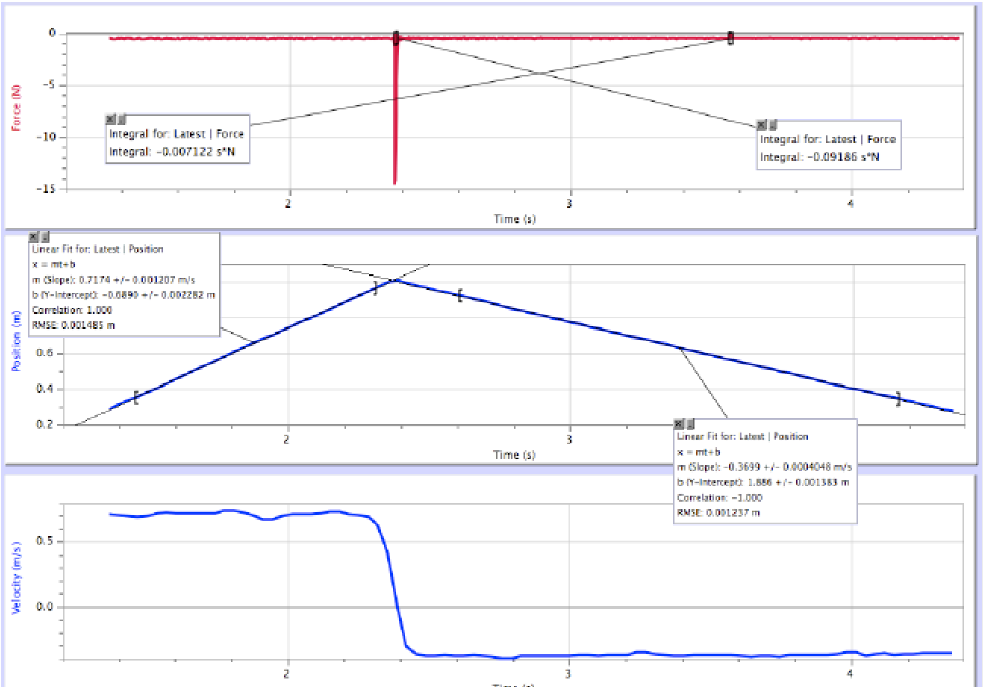
Urto elastico lento



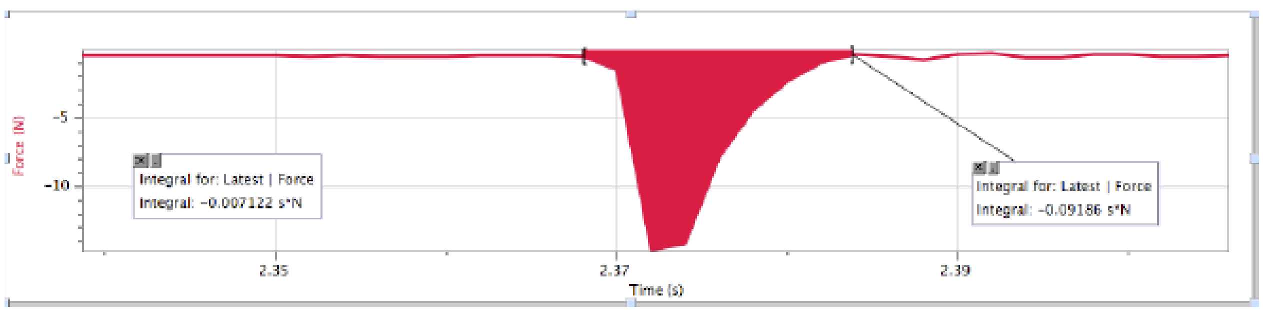
8	Urto elastico (fondo scala sensore di forza 10N)				
9					# sigma(dev std)
10	V iniziale (m/s)	0.374600	±	0.001117	
11	V finale (m/s)	-0.345400	±	0.003467	
12	Variazione p (Ns	0.056160	±	0.003642	
13					
14	Impulso (Ns)	0.086450			
15	Fondo (Ns)	0.031400			
16	Impulo netto (N	0.055050			
17					
18	Differenza (Ns)	0.001110	±	0.003642	0.304736



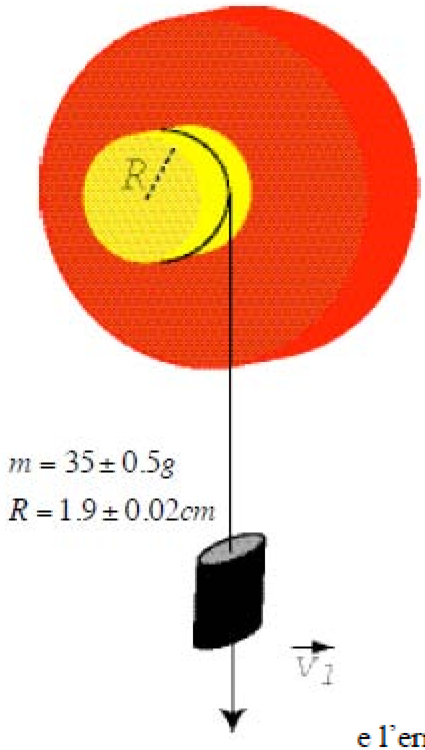
Urto anelastico (istantaneo)



Urto anelastico (fondo scala sensore di forza 50N)				
				# sigma(dev std)
V iniziale (m/s)	0.717400	±	0.001207	
V finale (m/s)	-0.369000	±	0.000405	
Variazione p (Ns)	0.084739	±	0.001273	
Impulso (Ns)	0.091860			
Fondo (Ns)	0.007122			
Impulso netto (Ns)	0.084738			
Differenza (Ns)	0.000001	±	0.001273	0.000943



Misura del momento d'inerzia di un volano



Le equazioni del moto del volano in discesa ed in salita sono

salita : moto orario $\begin{cases} T_s R + M_{ATT} = I\alpha_s = I\dfrac{a_s}{R} \\ mg - T_s = ma_s \end{cases}$

discesa : moto antiorario $\begin{cases} T_d R - M_{ATT} = I\alpha_d = I\dfrac{a_d}{R} \\ mg - T_d = ma_d \end{cases}$

da cui risolvendo il sistema il momento d'inerzia del volano è

$$I = \frac{2mgR^2}{a_d + a_s} - mR^2 \approx \frac{2mgR^2}{a_d + a_s}$$

.

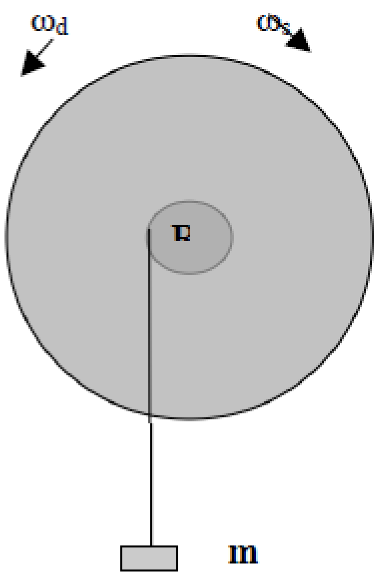
e l'errore sul momento d'inerzia è

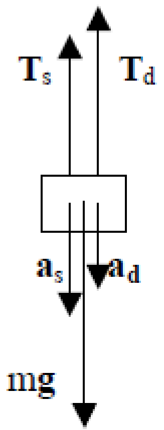
$$\sigma_I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial a_d}\sigma_{a_d}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial a_s}\sigma_{a_s}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial a_m}\sigma_{a_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial a_R}\sigma_{a_R}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{2mgR^2}{(a_d + a_s)^2}\right]^2 \sigma_{a_d}^2 + \left[\frac{2mgR^2}{(a_d + a_s)^2}\right]^2 \sigma_{a_s}^2 + \left(\frac{2gR^2}{a_d + a_s}\sigma_m\right)^2 + \left(\frac{4mgR}{a_d + a_s}\sigma_R\right)^2}$$

$$= \frac{2mgR^2}{(a_d + a_s)}\sqrt{\frac{\sigma_{a_d}^2 + \sigma_{a_s}^2}{(a_d + a_s)^2} + \frac{\sigma_m^2}{m^2} + \frac{4\sigma_R^2}{R^2}} = I\sqrt{\frac{\sigma_{a_d}^2 + \sigma_{a_s}^2}{(a_d + a_s)^2} + \frac{\sigma_m^2}{m^2} + \frac{4\sigma_R^2}{R^2}}$$

Momento d'attrito





Il momento d'attrito utilizzando la prima equazione invece è

$$M_{ATT} = \left(I + mR^2\right)\frac{a_s}{R} - mgR \approx \frac{I}{R}a_s - mgR$$

con errore

$$\sigma_{M_{ATT}} = \sqrt{\left(\frac{\partial M_{ATT}}{\partial a_s}\sigma_{a_s}\right)^2 + \left(\frac{\partial M_{ATT}}{\partial I}\sigma_I\right)^2 + \left(\frac{\partial M_{ATT}}{\partial m}\sigma_m\right)^2 + \left(\frac{\partial M_{ATT}}{\partial R}\sigma_R\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{I^2}{R^2}\sigma_{a_s}^2 + \frac{a_s^2}{R^2}\sigma_I^2 + g^2R^2\sigma_m^2 + \left(\frac{I^2a_s^2}{R^4} + m^2g^2\right)\sigma_R^2}$$