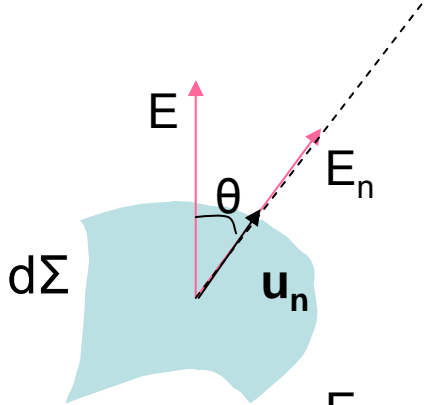
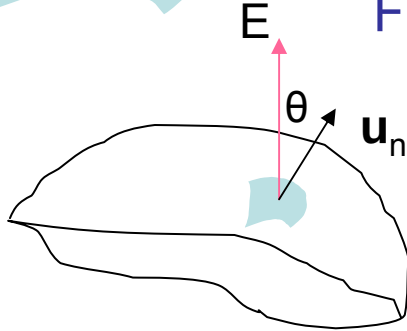


Flusso del campo elettrico



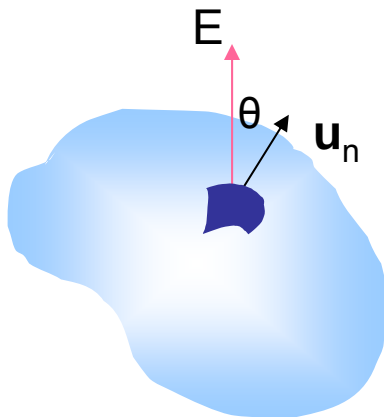
Flusso del campo **E** attraverso una superficie $d\Sigma$

$$d\Phi(E) = \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{u}}_n d\Sigma = E \cos \theta d\Sigma = E_n d\Sigma$$



Flusso del campo **E** attraverso una superficie Σ aperta

$$\Phi(E) = \int_{\Sigma} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{u}}_n d\Sigma$$



Flusso del campo **E** attraverso una superficie Σ chiusa

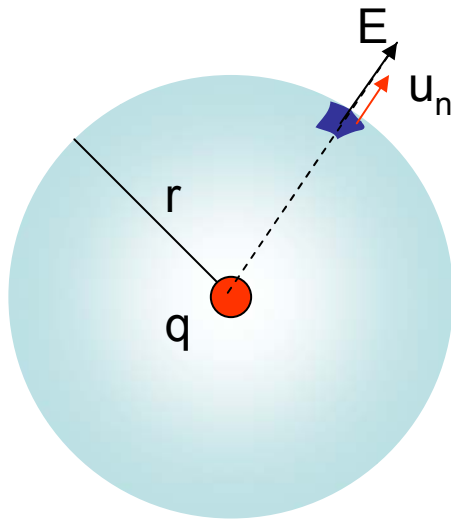
$$\Phi(E) = \oint_{\Sigma} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \text{flusso (uscente - entrante)}$$

Unità di misura: $[\Phi] = \text{Vm}$

Legge di Gauss

Il flusso del campo elettrostatico \mathbf{E} prodotto da un sistema di cariche attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma algebrica delle cariche contenute all'interno della superficie, divisa per ϵ_0

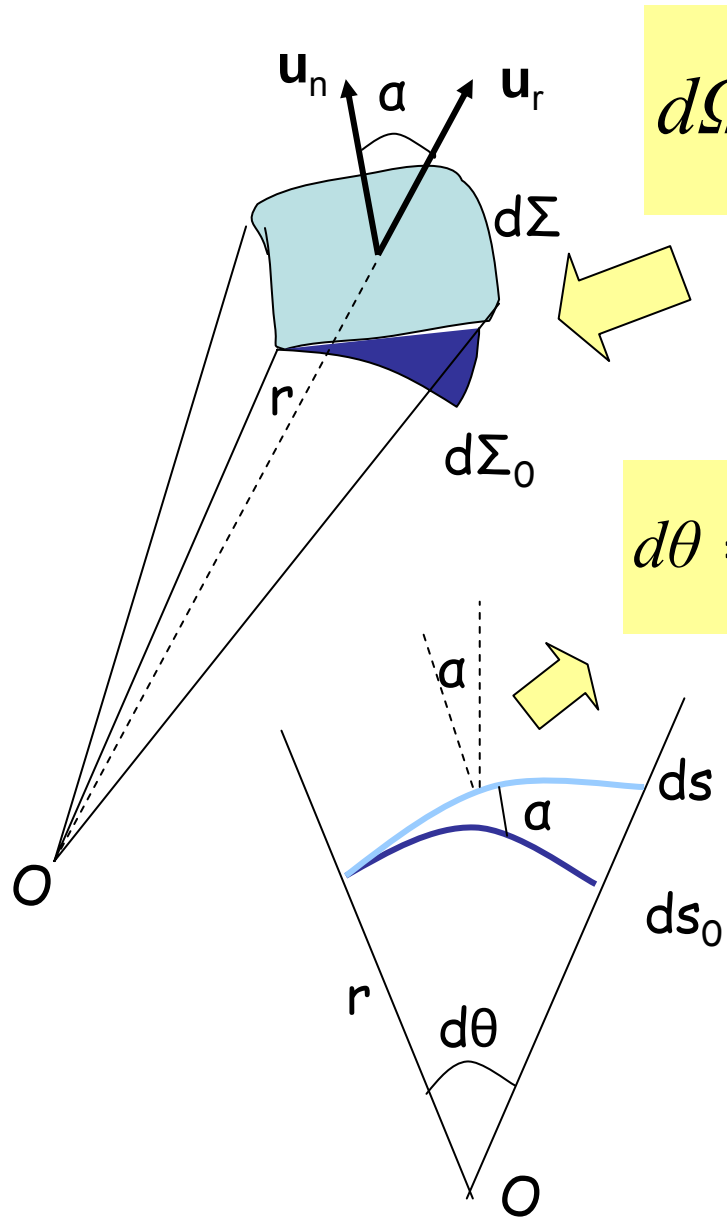
$$\Phi(E) = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$



Esempio: per una carica puntiforme q : $\vec{\mathbf{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{\mathbf{u}}_r$

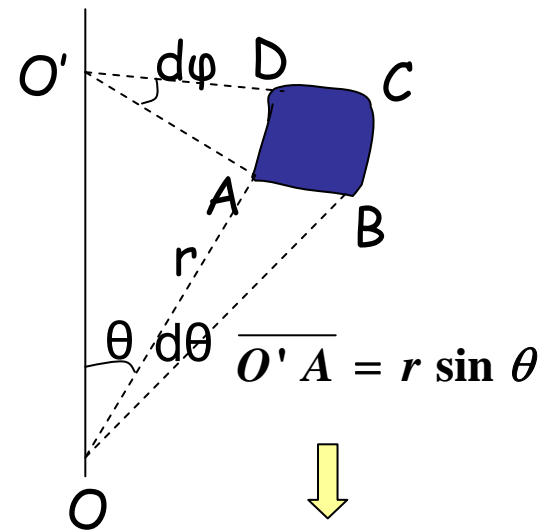
$$\begin{aligned} \Phi(E) &= \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint \vec{\mathbf{u}}_r \cdot \vec{\mathbf{u}}_n d\Sigma \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (\Sigma = 4\pi r^2) \end{aligned}$$

L'angolo solido



$$d\Omega = \frac{d\Sigma \cos \alpha}{r^2} = \frac{d\Sigma_0}{r^2}$$

$$d\theta = \frac{ds \cos \alpha}{r} = \frac{ds_0}{r}$$



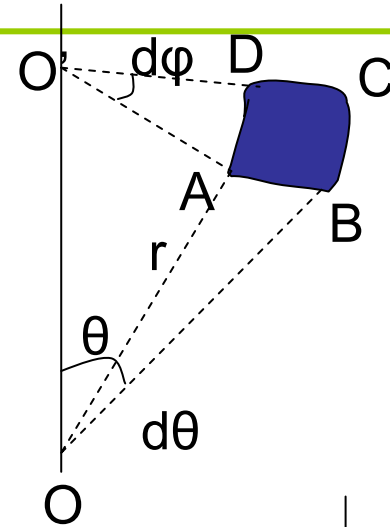
$$d\Sigma_0 = (AB) \cdot (AD) = (r d\theta)(r \sin \theta d\varphi) = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_0}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi$$

L'angolo solido

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_0}{r^2} = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

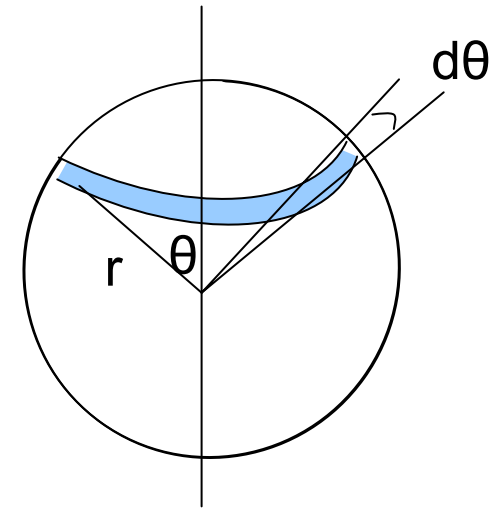
Non dipende da r !



Per una superficie finita: $\Omega = \iint \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$

Per una corona sferica:

$$\begin{aligned} d\Omega &= \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi \sin \theta \, d\theta \end{aligned}$$



l'angolo solido tra θ_1 e θ_2 è:

$$\begin{aligned} \Omega(\theta_1, \theta_2) &= 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta \, d\theta \\ &= 2\pi (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \end{aligned}$$

integrando in tutta la sfera:

$$\Omega = 4\pi$$

Dimostrazione della Legge di Gauss

Il flusso attraverso $d\Sigma$ è:

$$\begin{aligned} d\Phi(\mathbf{E}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_n d\Sigma}{r^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma \cos\theta}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma_0}{r^2} \end{aligned}$$

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_0}{r^2}$$

Il flusso del campo \mathbf{E} di una carica puntiforme q dipende solo dell'angolo solido e non dalla superficie né dalla sua distanza alla carica.

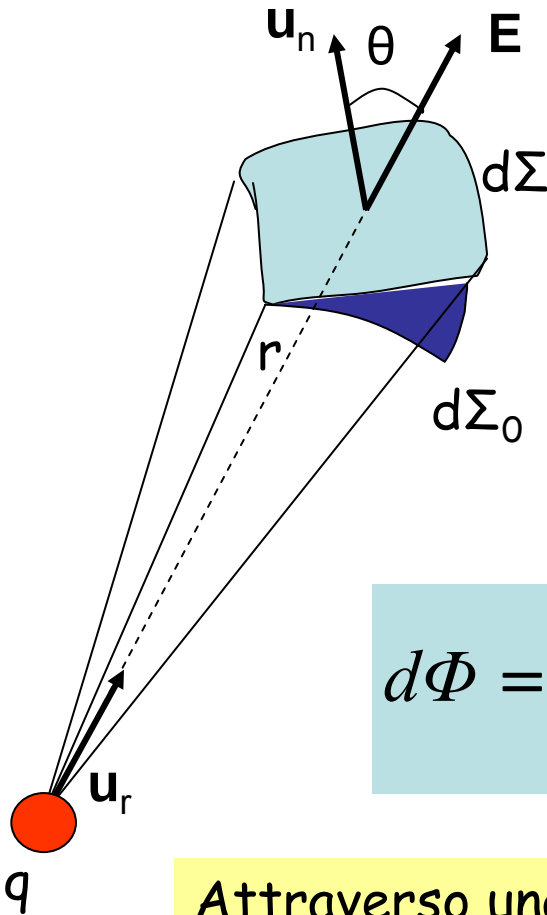
$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

Attraverso una superficie finita Σ

$$\Phi(\mathbf{E}) = \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

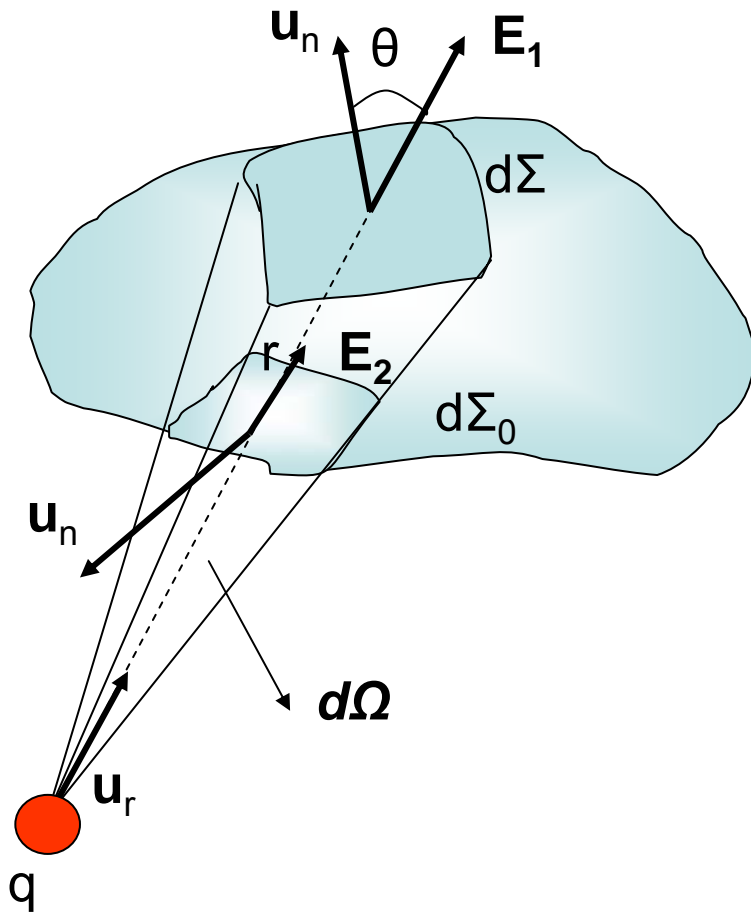
Attraverso una superficie chiusa che contiene una carica q

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$



Dimostrazione della Legge di Gauss (2)

Se la carica è esterna alla superficie:



$$d\Phi_1(\vec{\mathbf{E}}) = \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$d\Phi_2(\vec{\mathbf{E}}) = \vec{\mathbf{E}}_2 \cdot \vec{\mathbf{u}}_n d\Sigma = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$



$$d\Phi_1(\vec{\mathbf{E}}) + d\Phi_2(\vec{\mathbf{E}}) = 0$$



$$\Phi(\mathbf{E}) = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{u}}_n d\Sigma = 0$$

Legge di Gauss

Il flusso totale del campo elettrico prodotto da una carica q vale q/ε_0 se la carica è interna alla superficie e vale zero se la carica è esterna.

Se il campo \mathbf{E} è generato da un **sistema di cariche** il risultato si può generalizzare a:

$$\Phi(\vec{\mathbf{E}}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\sum_i q_i \right)_{\text{int}}$$

Nel caso in cui il campo sia generato da una **distribuzione continua** di carica:

$$\Phi(\vec{\mathbf{E}}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int dq$$

Divergenza del campo elettrostatico

Formulazione locale della legge di Gauss

Divergenza:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (E_x, E_y, E_z) \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\end{aligned}$$

Teorema della divergenza:

$$\oint_{\Sigma} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} d\tau$$



$$\Phi(\vec{\mathbf{E}}) = \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\tau} dq = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\tau} \rho d\tau$$

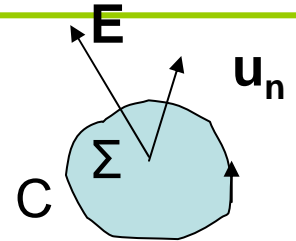
Prima legge di Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x, y, z)$$

Rotore del campo elettrostatico

Teorema di Stokes

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{u}}_n d\Sigma$$



$\vec{\mathbf{u}}_n$ è il versore normale alla superficie Σ orientato rispetto al verso di percorrenza del contorno C secondo la regola della vite

Per il campo elettrostatico **rot $\mathbf{E} = 0$**

Rotore in coordinate cartesiane

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{u}}_x & \vec{\mathbf{u}}_y & \vec{\mathbf{u}}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{\mathbf{u}}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{\mathbf{u}}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{\mathbf{u}}_z$$

Seconda legge di Maxwell
per l'elettrostatica

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = 0$$