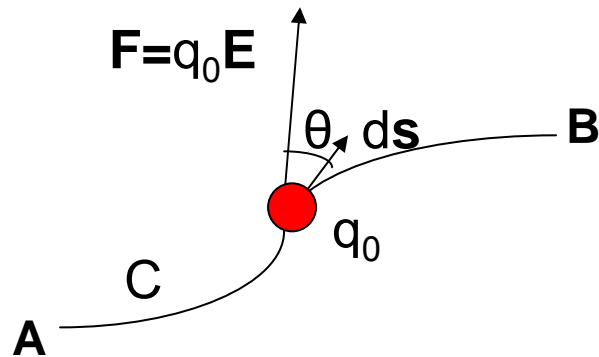


Lavoro della forza elettrica - Tensione

Il lavoro di una forza \mathbf{F} per uno spostamento elementare $d\mathbf{s}$ della carica q_0 è dato da

$$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = q_0 \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = q_0 E \cos \theta ds$$



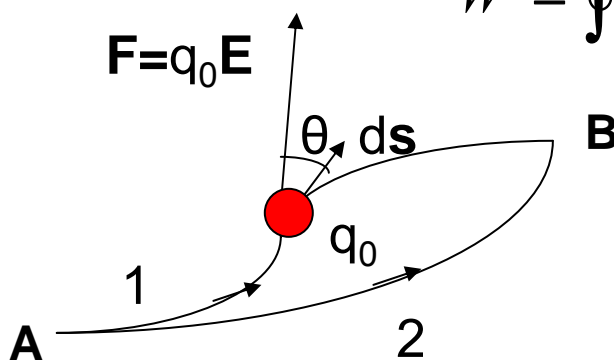
Il lavoro nello spostamento da A a B lungo la curva C è:

$$W = \int_C dW = \int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = q_0 \int_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

La **tensione elettrica** tra A e B relativa al percorso C è:

$$T(A \rightarrow B \text{ lungo } C) = W / q_0 = \int_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \neq T'(A \rightarrow B \text{ lungo } C')$$

Lavoro della forza elettrica - Potenziale


$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_1 \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = W_1 - W_2 = q_0 \mathcal{E}$$

Forza elettromotrice (f.e.m.)

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (\text{non è una forza!})$$

Se la forza è conservativa, la circuitazione è nulla
(non dipende dal percorso)

La forza elettrostatica è conservativa \longrightarrow il campo è conservativo
 \longrightarrow si può definire un potenziale elettrostatico:

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Differenza di potenziale

Potenziale ed energia potenziale

Differenza di potenziale

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Il potenziale in un punto è determinato a meno di una costante additiva

Il lavoro della forza per portare q_0 da A a B si può scrivere:

$$W_{AB} = -q_0(V_B - V_A) = -q_0\Delta V$$

Ad ogni forza conservativa è associata un'energia potenziale. Il lavoro della forza è pari all'opposto della variazione dell'energia potenziale

$$W_{AB} = -\Delta U_e = -(U_e(B) - U_e(A)) \quad \longrightarrow \quad \Delta U_e = q_0\Delta V$$



Energia elettrostatica

$$U_e = q_0V$$

Funzione di stato

In un campo elettrostatico la f.e.m. è sempre nulla e quindi è nullo il lavoro della forza elettrica per ogni spostamento che riporti la carica nella posizione iniziale

Il lavoro non dipende dal percorso

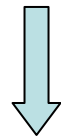
Il lavoro della forza \mathbf{F} per uno spostamento $d\mathbf{s}$ della carica q_0 nel campo generato dalla carica puntiforme q è:

$$dW = q_0 \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$



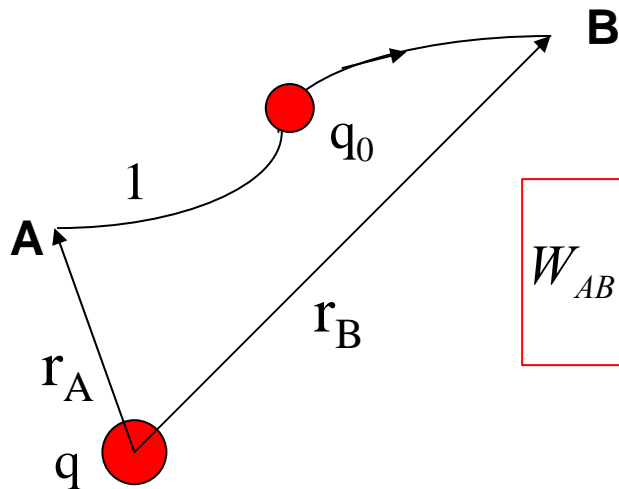
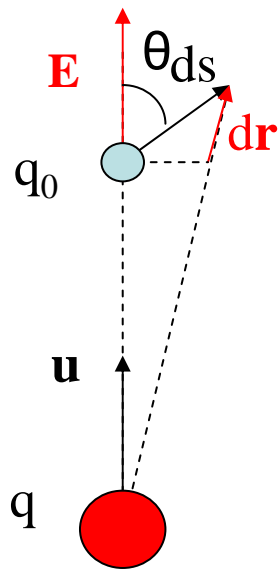
$$\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

$$dr = \vec{\mathbf{u}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = ds \cos \theta$$

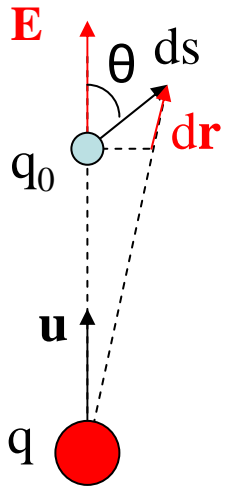


$$W_{AB} = q_0 \int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = - \left(\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_B} - \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \right)$$

Il lavoro non dipende dal percorso!



Calcolo del potenziale elettrostatico



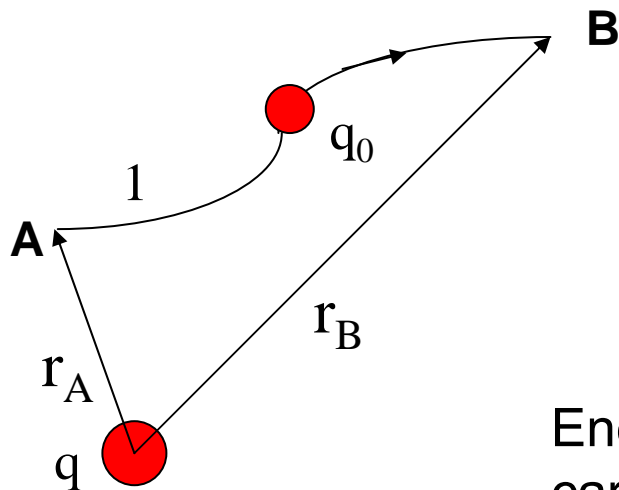
$$W_{AB} = q_0 \int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = - \left(\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_B} - \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \right)$$

Differenza di potenziale

$$V_B - V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

Variazione dell'energia potenziale

$$U_e(B) - U_e(A) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_B} - \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$



potenziale in un punto a distanza r dalla carica q

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + A$$

Energia potenziale della carica q_0 distante r da q

$$U_e(r) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r} + B$$

Potenziale ed Energia elettrostatici

Per due cariche molto lontane
tra loro la forza è trascurabile

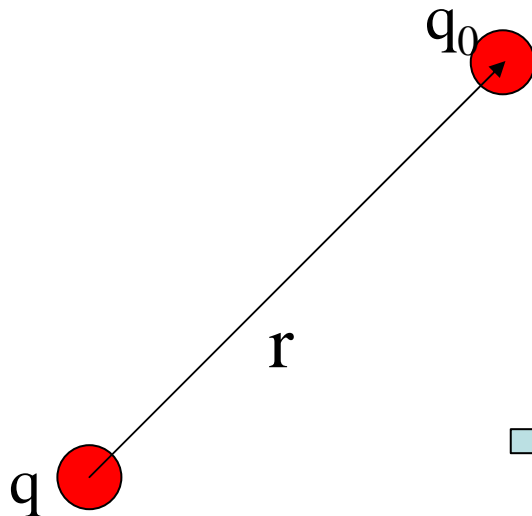
A distanza infinita

$$E(\infty)=0 \quad F(\infty)=0 \quad V(\infty)=0 \quad U_e(\infty)=0$$

Poiché $V(\infty)=A$, $U(\infty)=B \implies A=B=0$

$$\int_{\infty}^r \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -(V(r) - V(\infty)) = -V(r)$$

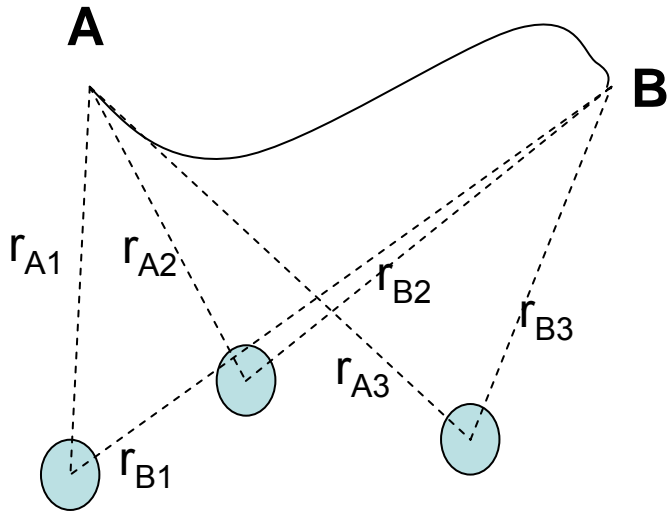
$$V(r) = -\int_{\infty}^r \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$



$$U_e(r) = q_0 V(r) = -q_0 \int_{\infty}^r \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Potenziale ed energia generati da un sistema di cariche

1. Distribuzione discreta



Differenza di potenziale

$$V_B - V_A = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{B,i}} - \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{A,i}}$$

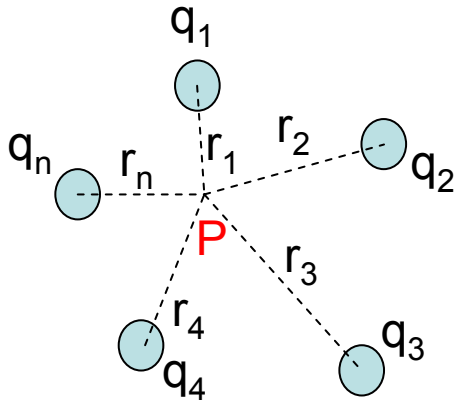
Differenza di energia potenziale

$$U_e(B) - U_e(A) = \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{B,i}} - \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{A,i}}$$

Lavoro

$$W = -q_0(V_B - V_A) = -\left(\sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{B,i}} - \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{A,i}} \right) = -\Delta U_e$$

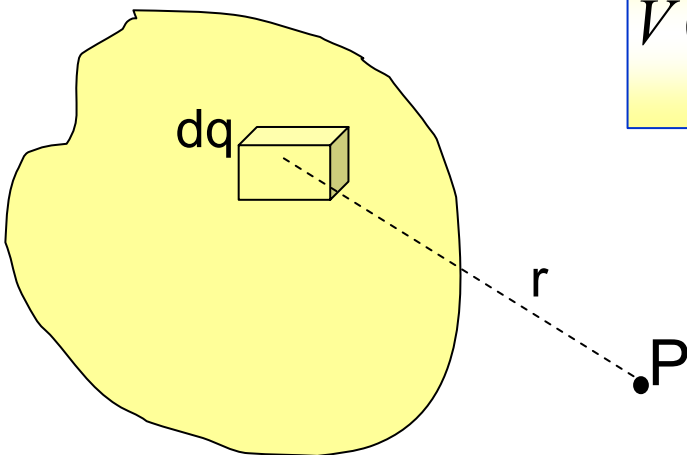
Potenziale generato da un sistema di cariche



Il potenziale in un punto P è:

$$V(P) = V(x, y, z) = -\int_{\infty}^P \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

2. Distribuzione continua



$$V(P) = V(x, y, z) = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

A differenza del campo elettrico, non è il valore del potenziale ad essere significativo ma le sue variazioni. Lo stesso vale per l'energia potenziale.

Potenziale elettrostatico: Applicazioni

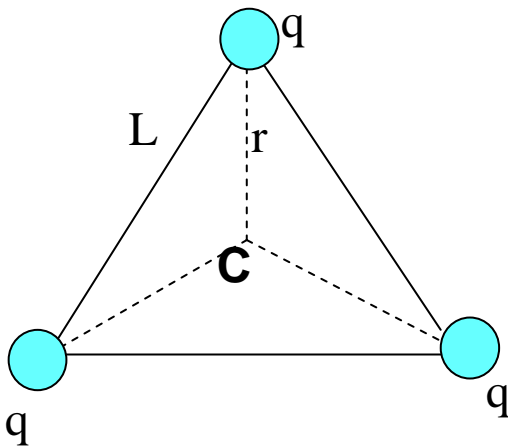
La d.d.p. di 1V è quella che dà luogo al lavoro di 1J
per il trasporto di una carica di 1C

Unità di misura: nel SI $\Rightarrow [V] = \text{Joule/Coulomb} = \text{J/C}$

$\Rightarrow [E] = \text{V/m} = \text{N/C}$

Esempio:

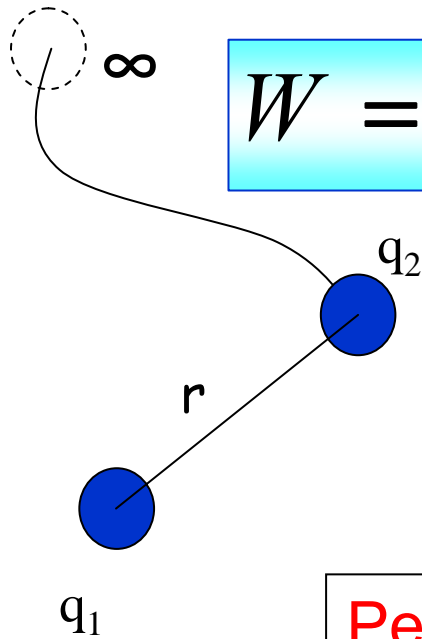
Calcolare il potenziale elettrostatico nel centro di un triangolo equilatero di lato L se in ogni vertice c'è una carica q



$$r \cos 30^\circ = L / 2 \Rightarrow r = L / \sqrt{3}$$

$$V = 3 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0 L} q$$

Energia potenziale elettrostatica



$$W = -\Delta U_e$$

Il lavoro della forza elettrica per portare la carica q_2 dall'infinito a una distanza r dalla carica q_1 è uguale all'energia potenziale delle due cariche fisse.

$$U_e(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Per un sistema di cariche si sommano algebricamente le energie di ciascuna copia:

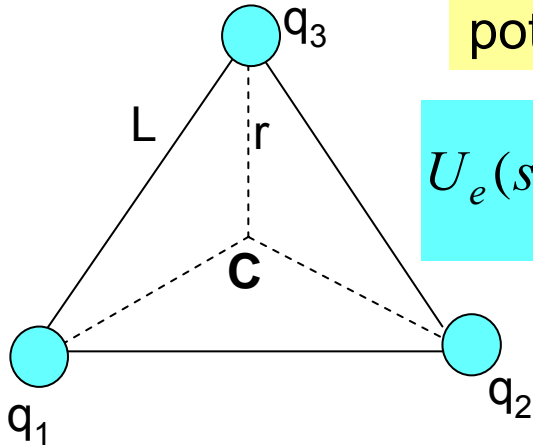
$$U_e(\text{система}) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Energia potenziale elettrostatica

Esempio:

Tre cariche q_1 , q_2 e q_3 sono poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato L . Calcolare l'energia potenziale elettrostatica del sistema.

$$U_e(\text{sistema}) = U_{12} + U_{13} + U_{23} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 L}$$



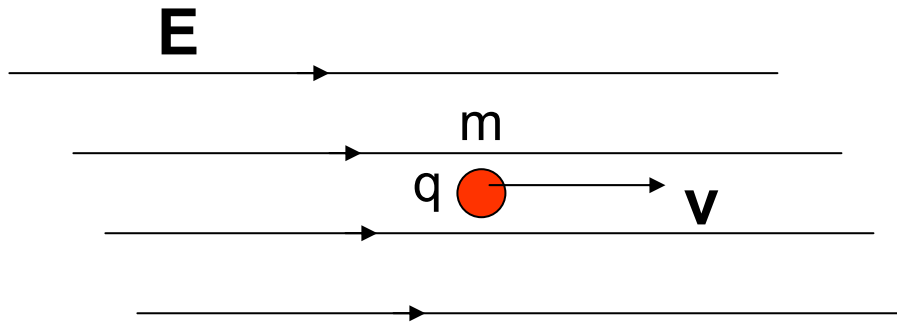
Una carica q_0 viene posta al centro C del triangolo. Calcolare il lavoro W necessario per portare q_0 all'infinito

$$U_e(q_0, C) = \frac{q_0 q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_0 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_0 q_3}{4\pi\epsilon_0 r}, r = L / \sqrt{3}$$

Energia complessiva: $U_e = U_e(\text{sistema}) + U_e(q_0)$

$$\begin{aligned} W &= -\Delta U_e = -\Delta U_e(\text{sistema}) - \Delta U_e(q_0) = -\Delta U_e(q_0) = \\ &= -(U_e(q_0, \infty) - U_e(q_0, C)) = U_e(q_0, C) \end{aligned}$$

Moto di una carica. Conservazione dell'energia

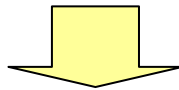


Per il teo. dell'energia cinetica:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = W$$

$$\begin{aligned} W &= -\Delta U_e = U_e(A) - U_e(B) \\ &= q_0 V_A - q_0 V_B \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + q_0 V_A = \frac{1}{2} m v_B^2 + q_0 V_B$$

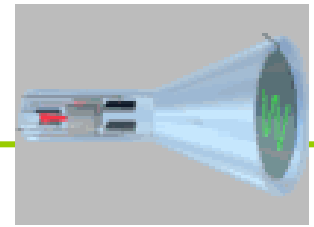


Conservazione dell'energia

$$E = E_k + U_e = \frac{1}{2} m v^2 + q_0 V$$

Durante il moto della particella l'energia totale rimane costante

Moto di una carica. Esempi



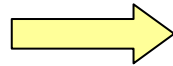
$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E \cdot (x_B - x_A)$$

Se \mathbf{E} è uniforme
 \mathbf{E} nella direzione
e verso di \mathbf{x} :



$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = q_0 E (x_B - x_A)$$

Se \mathbf{E} è prodotto da una
carica puntiforme q



$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

L'elettronvolt

Quando una carica viene accelerata da una differenza di potenziale di 1V, acquista l'energia cinetica

$$1 \text{ eV} = e \Delta V = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ J} = 6.25 \cdot 10^{18} \text{ eV}$$

Il campo come gradiente del potenziale

Spostamento
differenziale:

$$d\vec{r} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

Variazione del
potenziale:

$$\begin{aligned} dV &= V(x + dx, y + dy, z + dz) - V(x, y, z) = \\ &= -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz \end{aligned}$$

Il differenziale totale è:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

→ $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

$$\text{grad } V = \vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Superficie equipotenziale

Superficie equipotenziale: superficie dello spazio tridimensionale nei cui punti il potenziale ha lo stesso valore: $V(x, y, z) = \text{costante}$

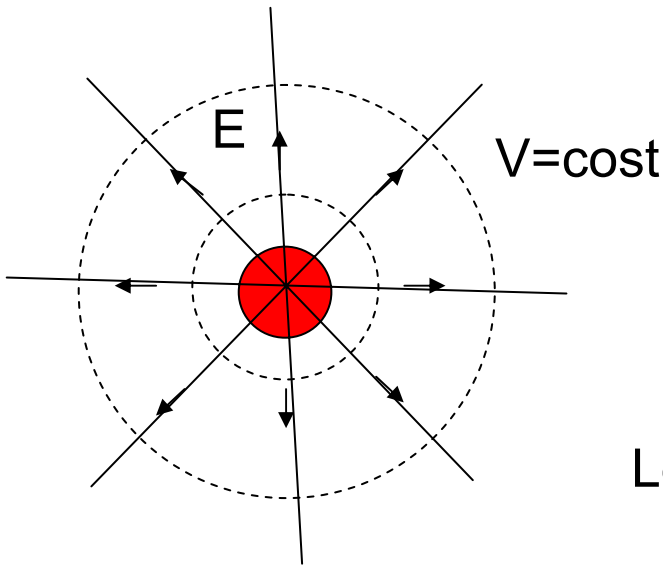
Per un punto passa solo una superficie equipotenziale: V è univoco

Le linee di forza risultano perpendicolari alle sup. equip.: indica il verso della massima diminuzione del potenziale

Per una carica puntiforme

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow r = \text{costante}$$

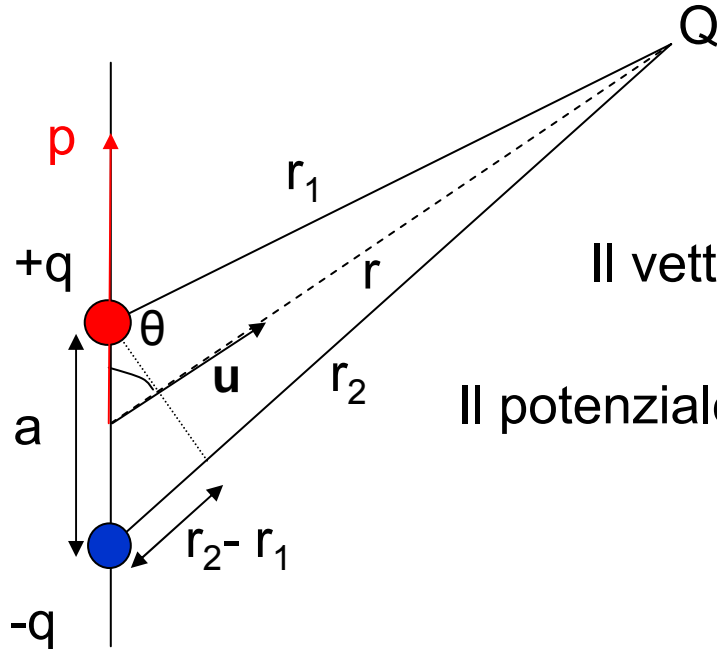
Le superfici equipotenziali sono sfere concentriche



Esperimenti interattivi: www.cco.caltech.edu/~phys1/java/phys1/EField/EField.html

Il dipolo elettrico

Il dipolo elettrico è costituito da due cariche puntiformi uguali e di segno opposto distanti a



Il vettore momento di dipolo è:

$$\vec{p} = q \vec{a}$$

Il potenziale vale:

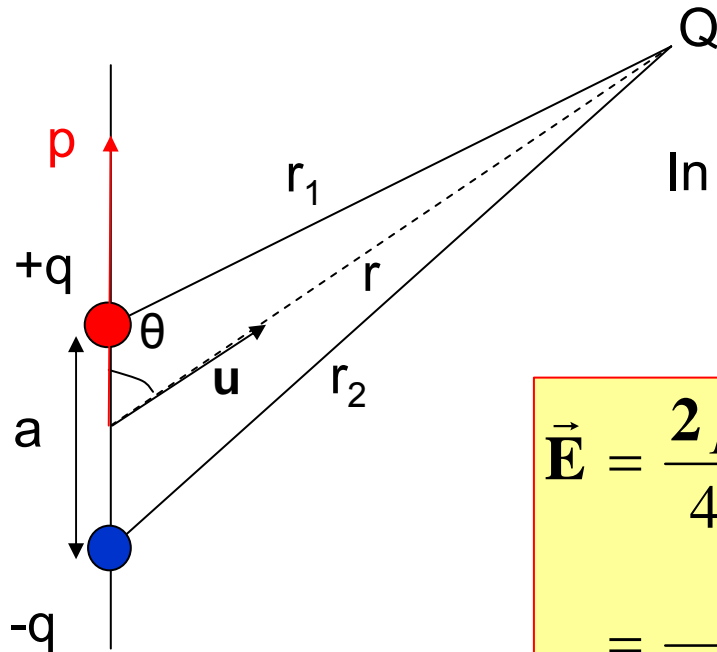
$$V(Q) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Se $r \gg a$, $r_2 - r_1 = a \cos \theta$, $r_1 r_2 = r^2$



$$V(Q) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Il dipolo elettrico: campo elettrico



$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} V$$

$$V(P) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

In coordinate polari:

$$d\vec{s} = dr \vec{\mathbf{u}}_r + r d\theta \vec{\mathbf{u}}_\theta$$

$$\vec{\mathbf{E}}(r, \theta) = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}} &= \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{\mathbf{u}}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{\mathbf{u}}_\theta \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{\mathbf{u}}_r + \sin \theta \vec{\mathbf{u}}_\theta) \end{aligned}$$

Sull'asse del dipolo

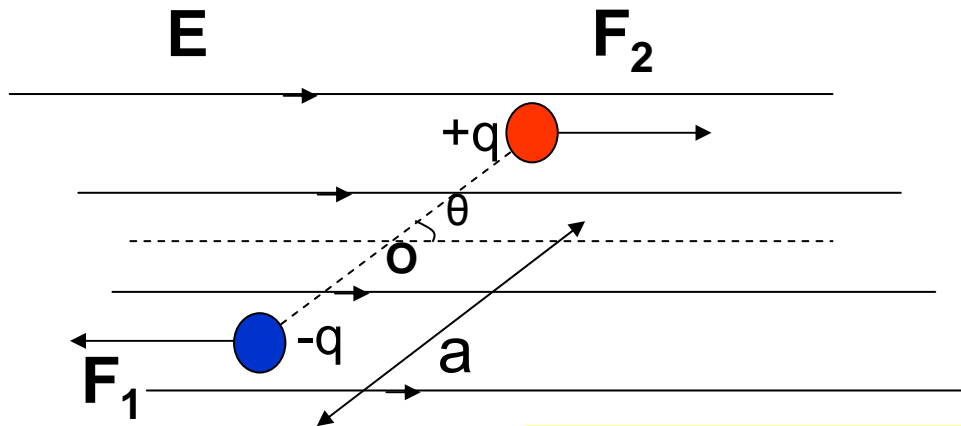
$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{2\vec{\mathbf{p}}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Nel piano mediano

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{-\vec{\mathbf{p}}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Solo in questi casi
E è parallelo a **p**

Il dipolo elettrico: forza ed energia



Forza su un dipolo elettrico

$$\vec{F}_1 = -q\vec{E}$$

$$\vec{F}_2 = +q\vec{E}$$

Momento della coppia

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F} = \vec{a} \times q\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

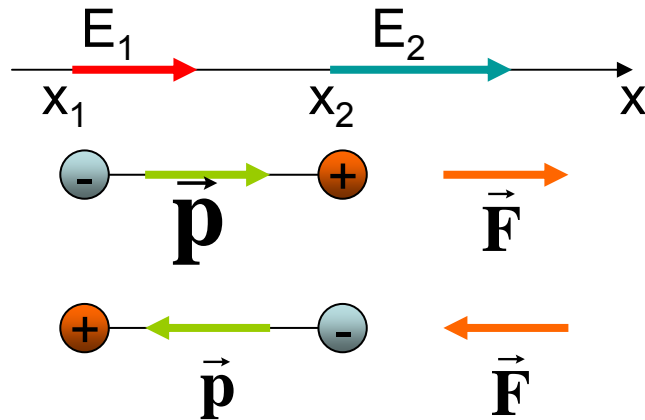
Il lavoro e:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta = -pE \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta \\ &= pE(\cos \theta - \cos \theta_0) = -[U_e(\theta) - U_e(\theta_0)] \end{aligned}$$

→ Energia potenziale
del dipolo elettrico

$$U_e(\theta) = -pE \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Il dipolo elettrico in un campo non uniforme

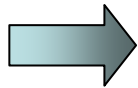


Il campo $E(x)$ varia con x

$$E_2 > E_1$$

Se la distanza a tra le cariche e' piccola

$$E_2 = E_1 + \frac{dE}{dx} a$$



$$F = q(E_2 - E_1) = q \frac{dE}{dx} a = p \frac{dE}{dx}$$

Il verso della forza dipende dal segno della derivata di $E(x)$