

# Corrente elettrica

In metalli come il rame o l'argento, il numero di elettroni liberi per unità di volume coincide col numero di atomi per unità di volume

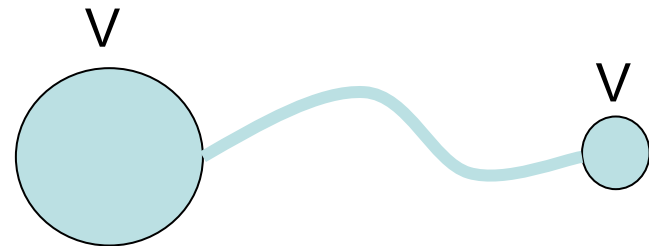
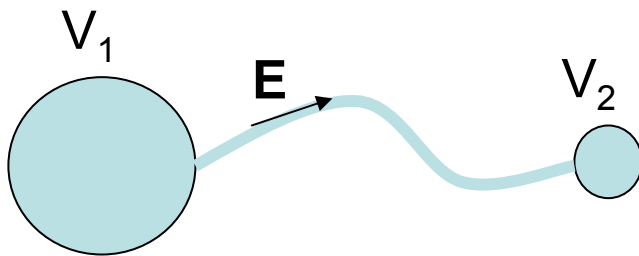
numero di portatori di carica nel rame per unità di volume

$$n = \frac{N_A \rho}{A} = \frac{6.022 \cdot 10^{26} \cdot 8.96 \cdot 10^3}{63.55} = 8.49 \cdot 10^{28} \text{ elettroni/m}^3$$

L'ordine di grandezza è lo stesso per tutti i conduttori metallici

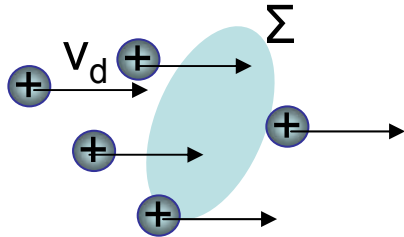
La velocità media dei portatori di carica è nulla:

$$\vec{v}_m = \frac{1}{N} \sum_i \vec{v}_i = 0$$



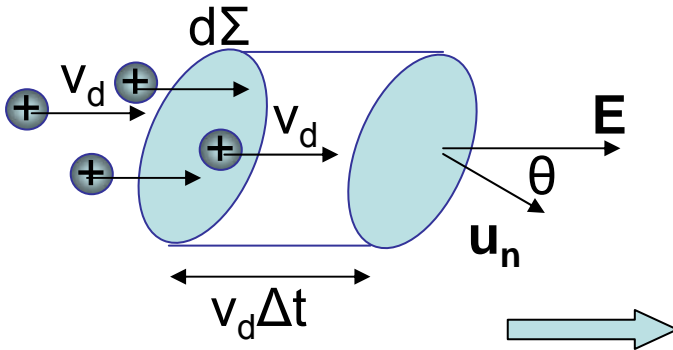
Se  $V_1 > V_2$ , si genera un passaggio di carica (corrente) che equilibra il sistema di conduttori finché il potenziale è uniforme.

# Corrente elettrica



L'intensità di corrente è la carica  $\Delta q$  che passa attraverso  $\Sigma$  nell'unità di tempo  $\Delta t$  per  $\Delta t \rightarrow 0$

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$



$$d\tau = v_d \Delta t d\Sigma \cos \theta$$

$$\Delta q = n_+ e d\tau = n_+ e v_d d\Sigma \cos \theta \Delta t$$

$$di = n_+ e v_d d\Sigma \cos \theta$$

definiamo il vettore densità di corrente:

$$\vec{j} = n_+ e \vec{v}_d$$

$$\Rightarrow di = \vec{j} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$



$$i = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

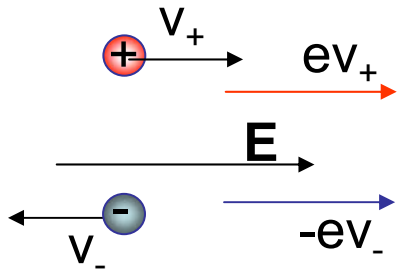
La corrente è uguale al flusso del vettore densità di corrente.

# Corrente elettrica

Se in particolare  $\Sigma$  è perpendicolare a  $\mathbf{j}$ :

$$i = j\Sigma$$

$$j = \frac{i}{\Sigma}$$



Se i portatori di carica sono elettroni ( $q=-e$ ), sotto l'azione di  $\mathbf{E}$  si muoveranno verso sinistra, ma la densità di corrente non cambia verso.

$$\mathbf{j} = -n_- e \mathbf{v}_-$$

Quando sono presenti, come nei semiconduttori, portatori positivi e negativi:

$$\vec{\mathbf{j}} = n_+ e \vec{\mathbf{v}}_+ - n_- e \vec{\mathbf{v}}_-$$

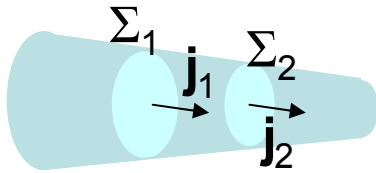
$\mathbf{j}$  ha sempre la direzione e il verso di  $\mathbf{E}$

Esempio: Un conduttore cilindrico di rame, avente sezione di area  $\Sigma = 4 \text{ mm}^2$ , è percorso da una corrente di intensità  $i = 8 \text{ A}$ . Calcolare la velocità di deriva degli elettroni

$$j = \frac{i}{\Sigma} = 2 \text{ A/mm}^2 = 2 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$$

$$\begin{aligned} v_d &= j / n e = 1.47 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} \\ &= 0.147 \text{ mm/s} \end{aligned}$$

# Corrente elettrica stazionaria



Conduttore percorso da corrente

Non c'è passaggio di corrente attraverso la superficie laterale del cono.

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \int_{\Sigma_1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_1 d\Sigma && \text{corrente che entra} \\ i_2 &= \int_{\Sigma_2} \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_2 d\Sigma && \text{corrente che esce} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{dal volume delimitato da } \Sigma_1 \text{ e } \Sigma_2 \text{ e la} \\ \text{superficie laterale del cono.} \end{array}$$

Se  $i_1 = i_2$  la corrente è stazionaria: corrente costante attraverso ogni sezione del conduttore

Unità di misura: Ampere (A): si ha l'intensità di corrente di 1A quando, attraverso una data superficie, passa la carica di 1C in un secondo

$$A = \frac{C}{s}$$

# Legge di Ohm

La densità di corrente nel conduttore è proporzionale al campo elettrico esterno:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

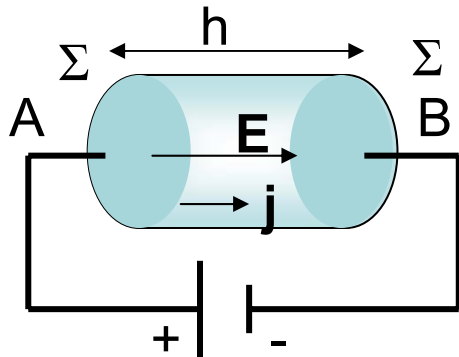
$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$$

Legge di Ohm della  
conduttività elettrica  $\sigma$  : conduttività elettrica

$$\rho = \frac{1}{\sigma} : \text{resistività del conduttore}$$

Verificata sperimentalmente anche nei gas e nei liquidi

Conduttore metallico



$$i = j\Sigma = \frac{\Sigma}{\rho} E \longrightarrow E = \frac{\rho}{\Sigma} i$$

$$V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = Eh = \frac{\rho h}{\Sigma} i$$

$$R = \frac{\rho h}{\Sigma}$$

Resistenza

$$V = Ri$$

Legge di Ohm per i  
conduttori metallici

# Legge di Ohm

Se la sezione del conduttore metallico è variabile, per un tratto lungo  $dh$  e sezione  $\Sigma$ :

$$V = \int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \underbrace{\int_A^B \rho \frac{dh}{\Sigma}}_R i = Ri$$

In regime stazionario il rapporto tra la d.d.p. applicata ai capi di un conduttore metallico e l'intensità di corrente che lo attraversa è pari alla RESISTENZA

La resistenza dipende soltanto dalla resistività del materiale e dalle sue dimensioni.

(dipende anche dalla temperatura)

**Unità di misura:** resistenza  $R$ : Ohm ( $\Omega$ ):  $\Omega = V/A$   
resistività  $\rho$ :  $\Omega m$   
conduttività  $\sigma$ :  $(\Omega m)^{-1}$

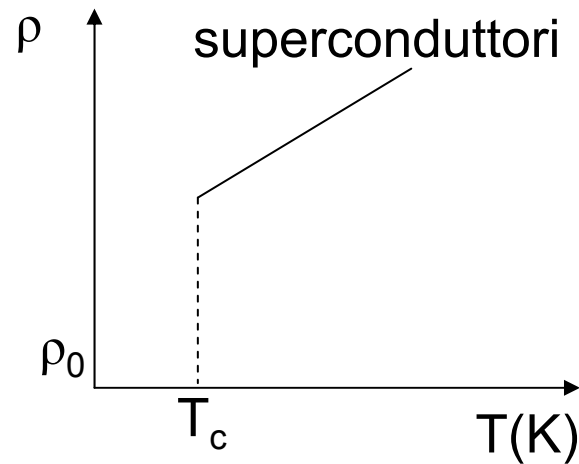
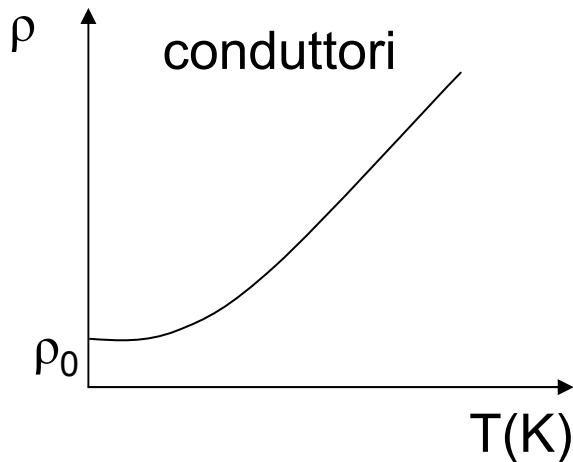
# Legge di Ohm

Effetti termici: attorno a  $T=20^{\circ}\text{C}$ , la dipendenza è lineare

$$\rho(T) = \rho(20^{\circ}\text{C})(1 + \alpha \cdot (T - 20^{\circ}\text{C}))$$

con  $\alpha$ : coefficiente termico

$$\alpha = \frac{1}{\rho(20^{\circ}\text{C})} \frac{\Delta\rho}{\Delta T}$$



Per i materiali superconduttori (H. Kammerlinnigh Onnes (1911)), al di sotto di una temperatura critica  $T_c$ , si può mantenere una corrente anche elevata senza applicare una d.d.p.

# Potenza – Effetto Joule

Consideriamo una carica  $dq$  che si muove attraversando una d.d.p.  $V$ .

Nello spostamento viene compiuto il lavoro:


$$dW = V dq = V i dt$$

e spesa la potenza:

$$P = \frac{dW}{dt} = Vi = Ri^2 = \frac{V^2}{R}$$



$$W = \int_0^t P dt = \int_0^t Ri^2 dt = Ri^2 t$$

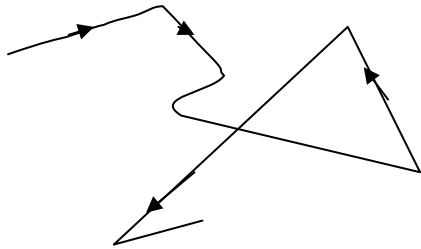
Questo lavoro è necessario per vincere la resistenza opposta dal reticolo cristallino al moto ordinato degli elettroni e viene assorbito dal conduttore la cui energia interna aumenta  aumenta la sua temperatura: **Effetto Joule**



# Modello classico della conduzione elettrica

Proposto da Drude (1900) e sviluppato da Lorentz (1906)

Gli elettroni si muovono nel reticolo in modo disordinato. Il cammino libero medio tra due urti con gli ioni è:  $\lambda = v \tau$



Quando si applica un campo  $\mathbf{E}$ , gli elettroni acquistano un'accelerazione  $\mathbf{a} = -e\mathbf{E}/m$  e alla distribuzione casuale e isotropa delle velocità si sovrappone una velocità di deriva  
 $v_d \ll v$

Sia  $\mathbf{v}_i$  la velocità dopo un urto e  $\mathbf{v}_{i+1}$  la velocità subito prima dell'urto successivo :

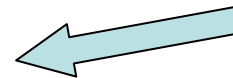
$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i - \frac{e\mathbf{E}}{m} \tau \quad \longrightarrow$$

$$\vec{\mathbf{v}}_d = \frac{1}{N} \sum_i \vec{\mathbf{v}}_{i+1} = \frac{1}{N} \sum_i \vec{\mathbf{v}}_i - \frac{e\vec{\mathbf{E}}}{m} \tau = -\frac{e\mathbf{E}}{m} \tau$$

La densità di corrente che consegue a questo moto ordinato è  $\vec{\mathbf{j}} = -n_e e \vec{\mathbf{v}}_d = \underbrace{\frac{n_e e^2 \tau}{m}}_{\sigma} \vec{\mathbf{E}}$

$$\vec{\mathbf{j}} = \sigma \vec{\mathbf{E}}$$

Legge  
di Ohm



$\sigma$  conduttività

# Esempio

La resistività del rame a  $T=20^{\circ}\text{C}$  è  $\rho=1.67 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ .

Calcolare il valore di  $\mathbf{E}$  necessario per mantenere una densità di corrente  $j=2 \text{ A/mm}^2$  (massima tollerabile)

$$E = \rho j = 3.34 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$$

La conduttività del rame è:  $\sigma = 1 / \rho = 0.60 \cdot 10^8 (\Omega\text{m})^{-1}$

Il tempo medio tra due urti è  $\tau = \frac{m\sigma}{n_e e^2} = 2.51 \cdot 10^{-14} \text{ s}$

Il cammino libero medio:  $\lambda = v\tau = v_F\tau = 2.51 \cdot 10^{-14} \cdot 1.58 \cdot 10^6 = 3.97 \cdot 10^{-8} \text{ m}$

distanza tra gli ioni del reticolo:  $2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$



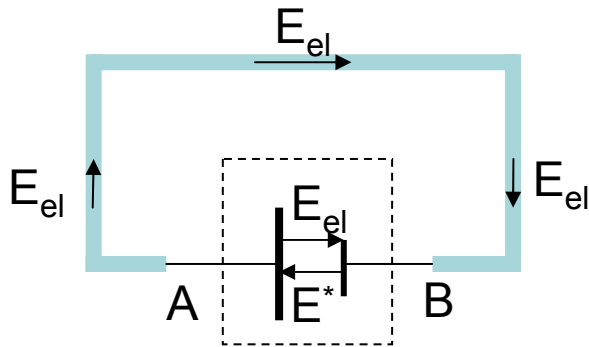
$\lambda \cong 200$  distanze  
interatomiche

# Forza elettromotrice

In un circuito chiuso:  $\oint \vec{E}_{el} \cdot d\vec{s} = 0$

Perché la corrente nel circuito sia non nulla è necessaria la presenza di una f.e.m.

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{E}^* \cdot d\vec{s} = R_T i$$



La f.e.m. è caratterizzata da una resistenza interna  $r_i$

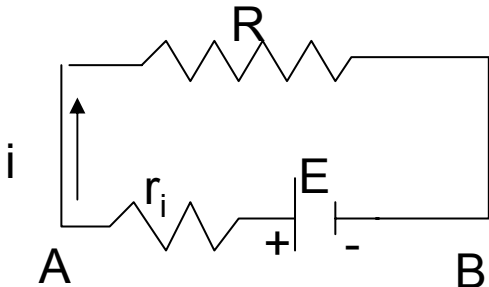
$$V_B - V_B = 0 = \mathcal{E} - r_i i - Ri$$

$$\mathcal{E} = (r_i + R)i = R_T i$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + r_i}$$

La d.d.p. ai capi della resistenza è:

$$V_A - V_B = Ri = \mathcal{E} - r_i i$$



$$\mathcal{E} i dt = R_T i^2 dt$$

Il lavoro fornito dal generatore viene dissipato nelle resistenze del circuito. La potenza dissipata è:

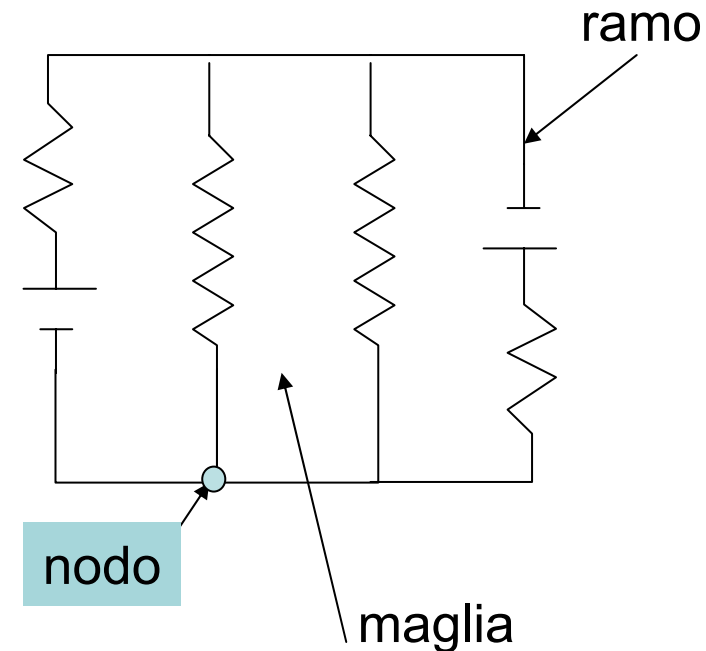
$$\mathcal{E} i = R_T i^2$$

# Leggi di Kirchhoff per le reti elettriche

**nodo**: punto nel quale convergono almeno 3 conduttori

**ramo**: può contenere componenti attivi (generatori) o passivi (resistori)

**maglia**: cammini chiusi costituiti da più rami



## Prima legge di Kirchhoff (nodi):

La somma algebrica delle correnti che confluiscono in un nodo è nulla

$$\sum_k i_k = 0$$

## Seconda legge di Kirchhoff (maglie):

La somma algebrica delle f.e.m. presenti nei rami della maglia è uguale alla somma algebrica delle d.d.p. ai capi dei resistori

$$\sum_k R_k i_k = \sum_k \mathcal{E}_k$$