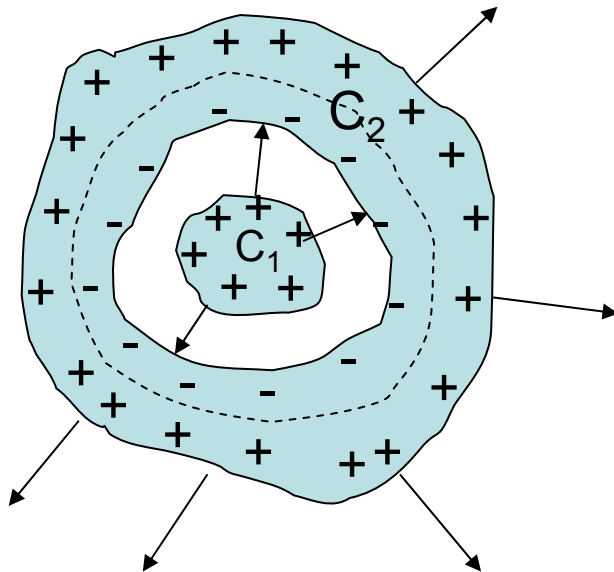


Schermo elettrostatico

Franklin, 1755



Induzione completa:

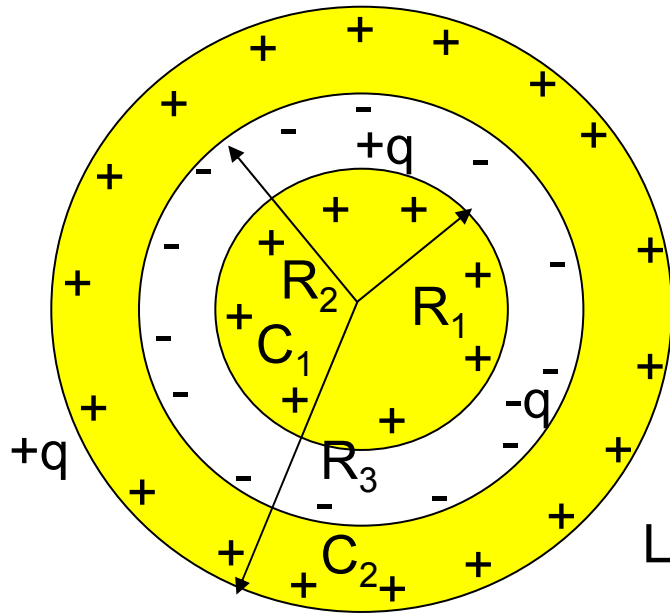
Se all'interno della cavità del conduttore C_2 isolato e privo di carica, introduciamo un conduttore carico C_1 con carica totale $+q$, mantenendolo isolato da C_2 , nella superficie interna di C_2 compare una carica $-q$ e su quella esterna una carica $+q$

Le linee di forza che partono da C_1 terminano su C_2

Se si porta C_1 a contatto con C_2 , la carica $+q$ su C_1 si elide con la carica $-q$ ma all'esterno non cambia nulla

Se si varia la carica sulla superficie esterna di C_2 o la sua distribuzione, il campo all'interno non cambia e pertanto non può alterare il campo all'interno della cavità

Condensatori



Il conduttore interno è carico con $+q$

Il campo all'interno della cavità è:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

La differenza di potenziale tra i conduttori è

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Questo sistema è un condensatore: tra i due conduttori c'è induzione completa. I conduttori costituiscono le armature del condensatore.

Capacità:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Indipendente dalla carica.
Determinata dalla geometria
del condensatore

Capacità

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2}$$

$$q = C(V_1 - V_2)$$

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{C}$$

$$V = V_1 - V_2$$

Unità di misura:

$$[C] = F = C/V$$

$$1 \text{ millifarad} = 1 \text{ mF} = 10^{-3}F$$

$$1 \text{ microfarad} = 1\mu F = 10^{-6}F$$

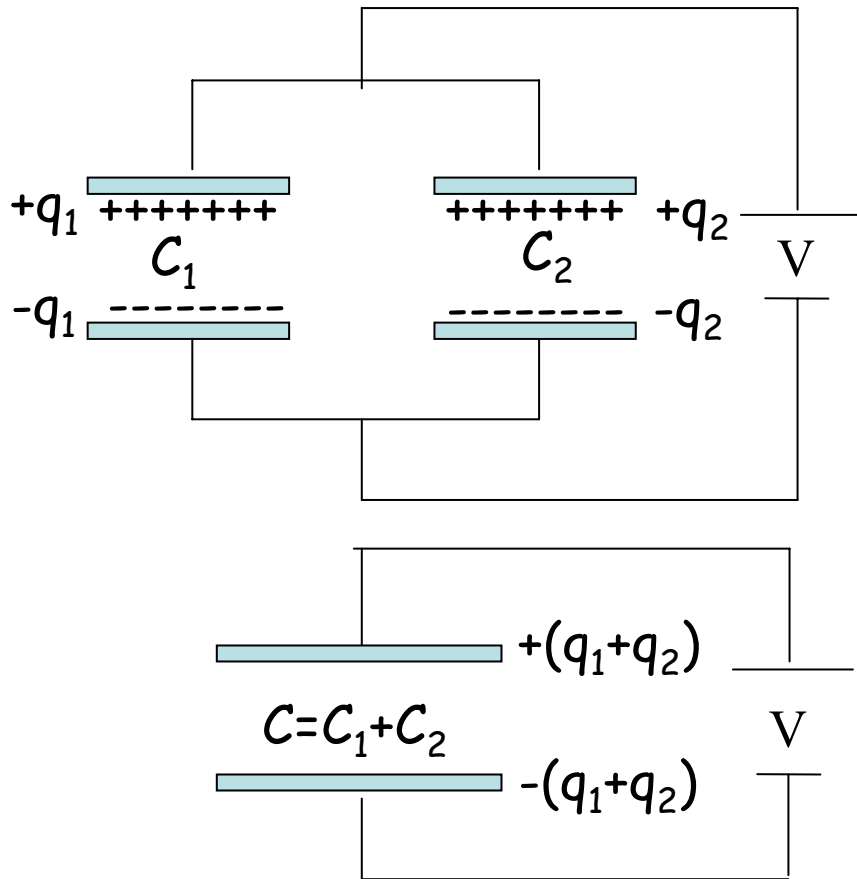
$$1 \text{ nanofarad} = 1\text{nF} = 10^{-9}F$$

$$1 \text{ picofarad} = 1\text{pF} = 10^{-12}F$$

La capacità dipende anche dal mezzo contenuto nell'intercapedine tra le armature

Collegamento di condensatori

collegamento in parallelo



$$q_1 = C_1 V \quad q_2 = C_2 V$$

$$q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2) V$$

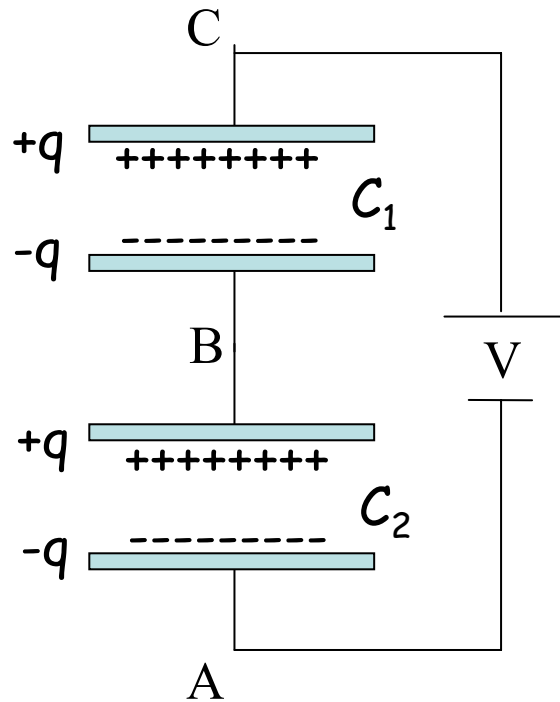
$$C_{eq} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2$$

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = \sum_i C_i$$

La capacità equivalente è sempre maggiore di quella di ciascun condensatore

Collegamento di condensatori

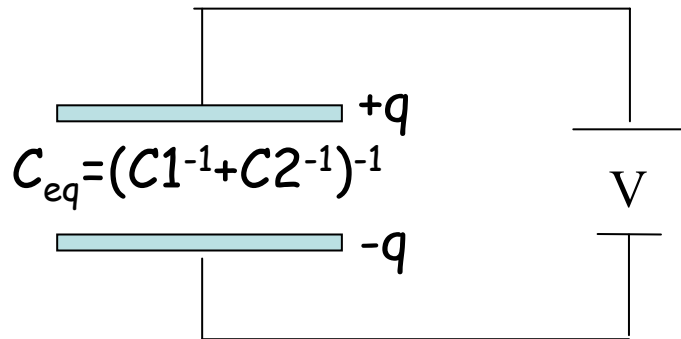
collegamento in serie



$$V_C - V_B = \frac{q}{C_1} \quad , \quad V_B - V_A = \frac{q}{C_2}$$

$$V = V_C - V_A = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{q}{C_{eq}}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad , \quad C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$



Nel collegamento in serie la capacità equivalente è sempre minore della capacità di ciascun condensatore

Energia del campo elettrostatico

Il processo di carica di un condensatore consiste in una separazione di cariche

Il lavoro per caricare il condensatore, essendo il campo conservativo, dipende soltanto dallo stato iniziale e dallo stato finale

Il processo si svolge portando una carica dq dall'armatura negativa sull'armatura positiva. In un certo istante la carica sull'armatura positiva sarà: $q' = C V'$. Il lavoro per spostare l'ulteriore carica dq attraverso la differenza di potenziale V' è:

$$dW = V' dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

Il lavoro complessivo sarà:

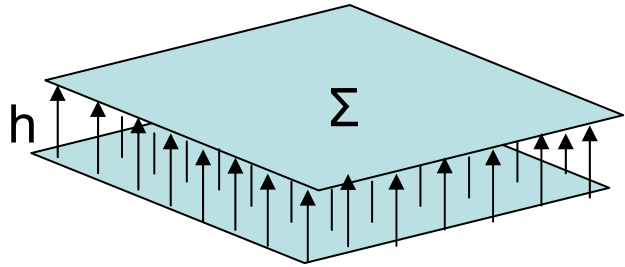
$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C}$$

Questo lavoro viene immagazzinato nel sistema sotto forma di energia potenziale elettrostatica

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} q V$$

Energia del campo elettrostatico

L'energia può essere associata alle cariche ma anche al campo elettrostatico prodotto dalle cariche (sorgenti del campo).



Condensatore piano: $V = E h$

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h} E^2 h^2 \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \Sigma h = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \tau \end{aligned}$$

Densità di energia elettrostatica:

$$u_e = \frac{U_e}{\tau} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

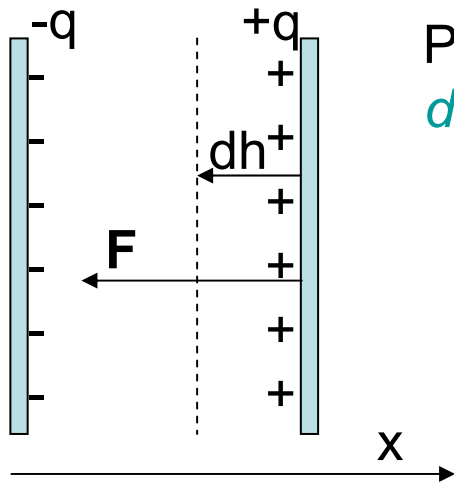
$$dU_e = u_e d\tau = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 d\tau \quad \longrightarrow$$

$$U_e = \int dU_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{\tau} E^2 d\tau$$

Forza tra le armature di un condensatore

L'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore è:

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \Sigma} h$$



Per uno spostamento dh ($dh < 0$), l'energia elettrostatica *diminuisce* di:

$$dU_e = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \Sigma} dh = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \Sigma dh < 0$$

E la forza elettrostatica fornisce il **lavoro**:

$$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{h}} = -dU_e = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \Sigma dh > 0$$

→ $\mathbf{F} \parallel d\mathbf{h}$

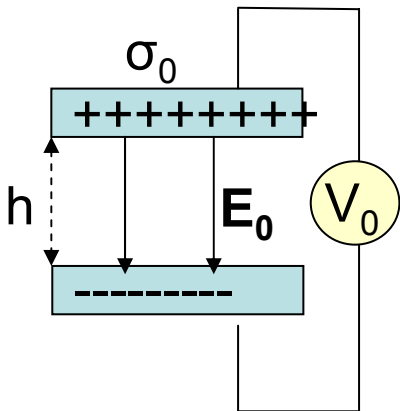
$$F = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \Sigma = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \Sigma$$

Pressione elettrostatica

$$p = \frac{F}{\Sigma} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Materiali Dielettrici

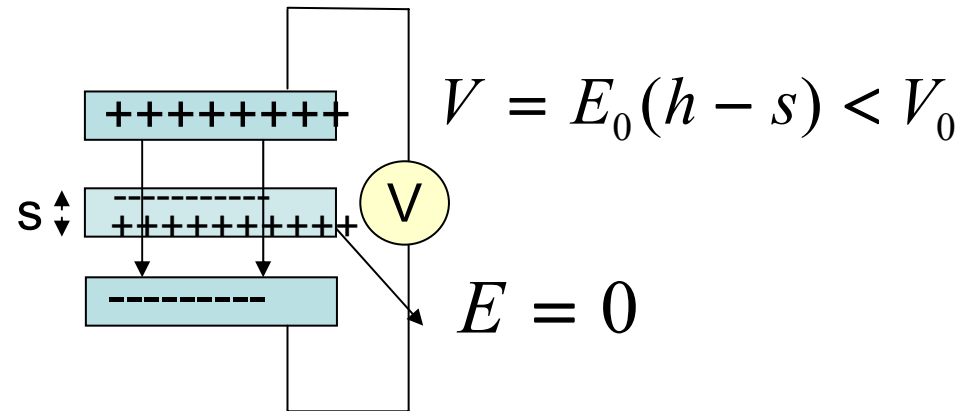
Come viene modificato il campo elettrostatico nello spazio tra conduttori carichi quando questo viene parzialmente o totalmente riempito con un materiale?



$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

$$V_0 = \frac{q_0}{C_0} = E_0 h$$

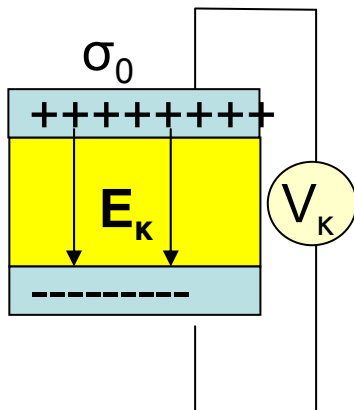
a) conduttore



$$V = E_0(h - s) < V_0$$

$$E = 0$$

b) isolante



$$V_\kappa = \frac{V_0}{\kappa} < V_0$$

$$E_\kappa = \frac{V_\kappa}{h} = \frac{V_0}{\kappa h} = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{\sigma_0}{\kappa \epsilon_0}$$

κ : costante dielettrica relativa

$$\kappa = \frac{V_0}{V} > 1$$

Materiali Dielettrici: campo elettrico

La variazione del campo dovuta alla presenza del dielettrico è:

$$E_0 - E_\kappa = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_0}{\kappa \varepsilon_0} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{\chi}{\chi + 1} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

dove $\chi = \kappa - 1$ è la suscettività elettrica del dielettrico

il campo nel dielettrico è

$$E_\kappa = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0}$$

densità di carica di polarizzazione

$$\sigma_p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma_0$$



$$q_p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} q_0$$

carica di polarizzazione

Materiali Dielettrici: capacità-energia

La capacità del condensatore pieno di dielettrico è:

$$C_{\kappa} = \frac{q_0}{V_{\kappa}} = \kappa \frac{q_0}{V_0} = \kappa C_0$$

$$C_{\kappa} > C_0$$

Tutte le capacità calcolate nel vuoto mantengono la stessa espressione dove ε_0 va sostituito dalla costante dielettrica assoluta del dielettrico:

$$\varepsilon = \kappa \varepsilon_0$$

Per il condensatore piano:

$$C_{\kappa} = \kappa C_0 = \frac{\kappa \varepsilon_0 \Sigma}{h} = \frac{\varepsilon \Sigma}{h}$$

Energia potenziale
del condensatore

$$u_e = \frac{U_e}{\Sigma h} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$$

densità di
energia

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{\sigma^2 \Sigma^2 h}{2\varepsilon \Sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \Sigma h$$



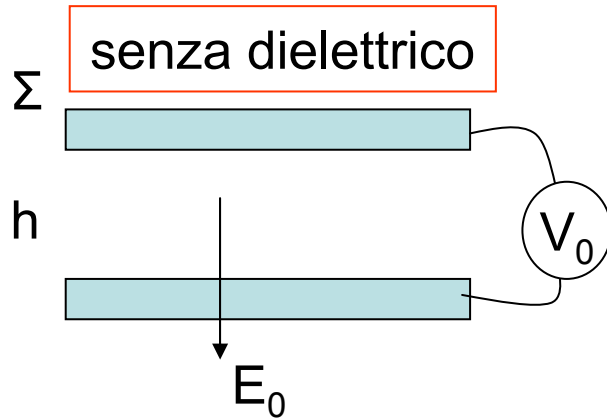
$$U_e = \int_{\tau} u_e d\tau = \int_{\tau} \frac{1}{2} \varepsilon E^2 d\tau$$

Materiali dielettrici - Esempio

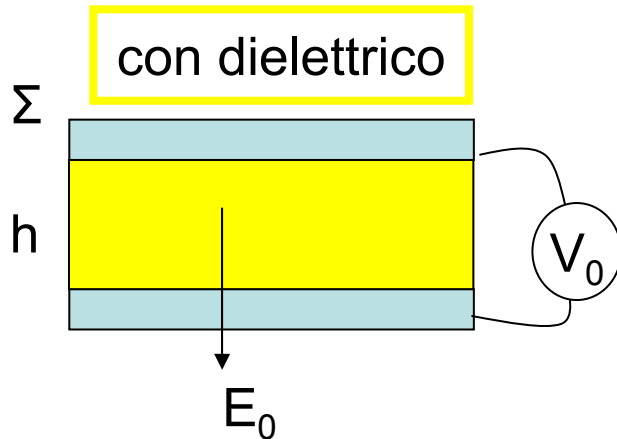
Condensatore piano collegato a un generatore di tensione



$$V = V_0$$



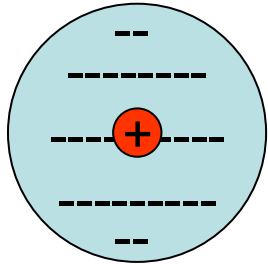
$$C_0 = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}, \quad q_0 = C_0 V_0, \quad E_0 = \frac{V_0}{h} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0},$$
$$U_e = \frac{1}{2} C_0 V_0^2, \quad u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$



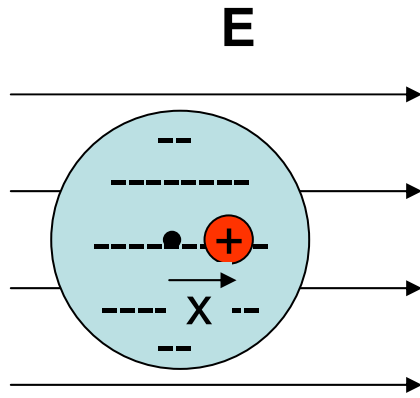
$$q = C V_0, \quad \sigma = \kappa \sigma_0, \quad E = E_0 = \frac{V_0}{h} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0},$$
$$q_p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} q = (\kappa - 1) q_0, \quad \sigma_p = (\kappa - 1) \sigma_0$$
$$U'_e = \frac{1}{2} C V_0^2 = \kappa U_e, \quad u'_e = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 = \kappa u_e$$

Polarizzazione dei dielettrici

nell'atomo:



$$\mathbf{p} = 0$$



$$\mathbf{p} = Ze \mathbf{x}$$

spostamento locale
della carica nell'atomo

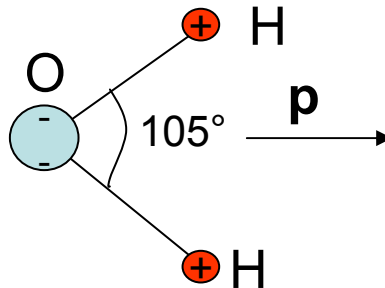
momento di dipolo
microscopico indotto

numero di atomi per unità di volume: $n = 10^{25} \div 10^{28} \text{ m}^{-3}$



l'effetto è misurabile

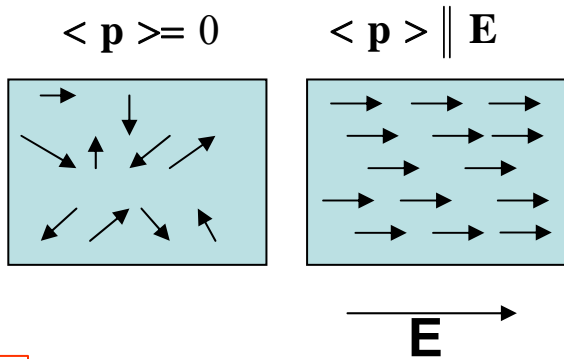
nella
molecola
d'acqua



momento di dipolo
intrinseco

Polarizzazione

In un volume $\Delta\tau$, con ΔN atomi o molecole che acquistano un momento medio $\langle \mathbf{p} \rangle$, il momento risultante è $\Delta \mathbf{p}$:



Il momento di per unità di volume è:

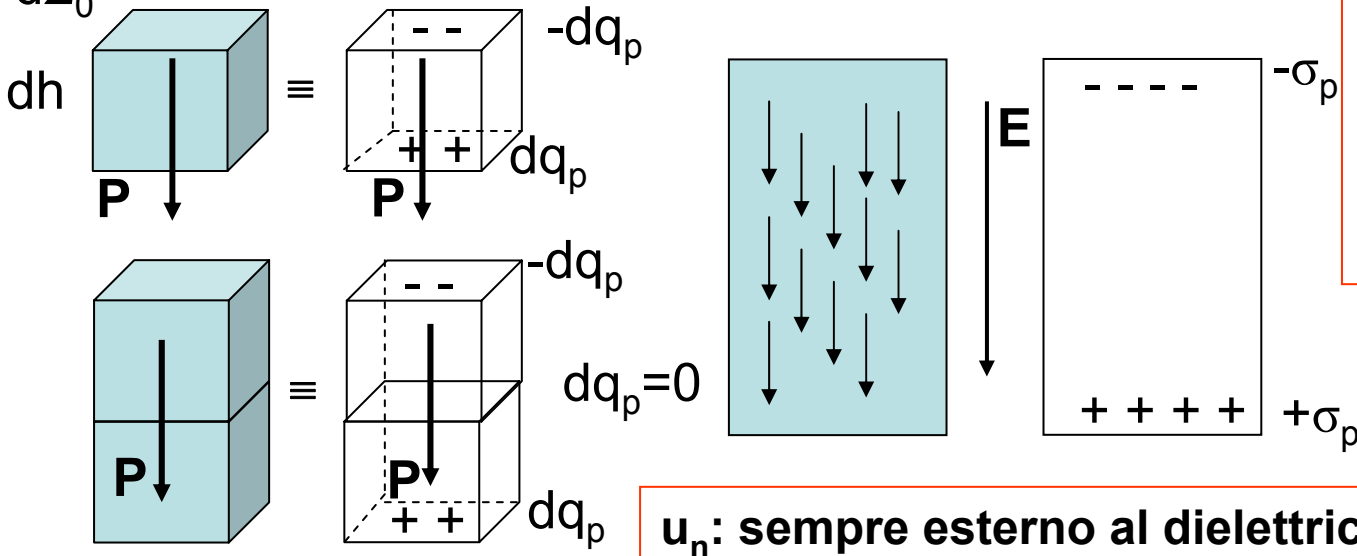
$$\vec{\mathbf{P}} = \frac{\Delta \vec{\mathbf{p}}}{\Delta \tau} = \frac{\Delta N}{\Delta \tau} < \vec{\mathbf{p}} > = n < \vec{\mathbf{p}} >$$

$$d\tau = d\Sigma_0 \, dh$$

$$dp = P d\tau$$

$$dq_p = P d\Sigma_0$$

$$(dq_p = \sigma_p d\Sigma_0 = Pd\Sigma_0)$$



La densità superficiale delle cariche di polarizzazione è uguale alla componente di \mathbf{P} normale alla superficie

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{u}_n$$

$$\sigma_p = P \cos \theta$$

u_n : sempre esterno al dielettrico!

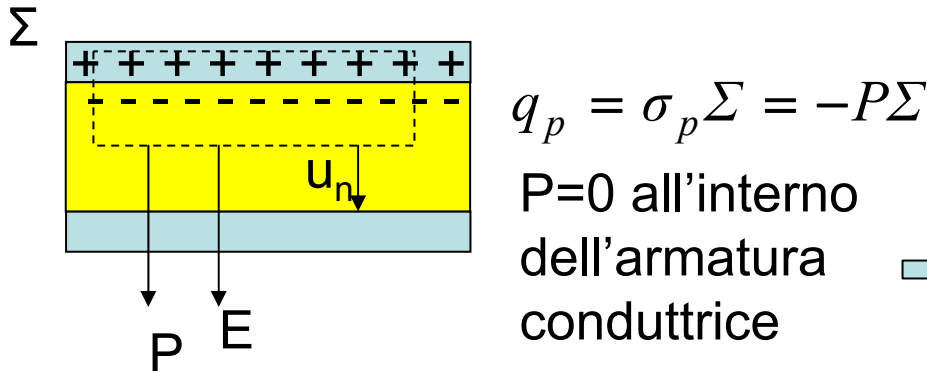
Equazioni generali con dielettrici

Nella maggior parte dei dielettrici \mathbf{P} è proporzionale a \mathbf{E} : **dielettrici lineari: materiali amorfi caratterizzati d'isotropia spaziale.**

$$\vec{\mathbf{P}} = \varepsilon_0(\kappa - 1)\vec{\mathbf{E}} = \varepsilon_0\chi\vec{\mathbf{E}}$$

La legge di Gauss per \mathbf{E} si scrive:

$$\Phi(E) = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \frac{q + q_p}{\varepsilon_0}$$



$$q_p = \sigma_p \Sigma = -P \Sigma$$

$P=0$ all'interno
dell'armatura
conduttrice

$$\Rightarrow \oint \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{u}}_n d\Sigma = P \Sigma$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{\mathbf{E}}) = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(q - \oint \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{u}}_n d\Sigma \right) \Rightarrow \oint (\varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}) \cdot \vec{\mathbf{u}}_n d\Sigma = q$$

$$\Rightarrow \vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} \quad \text{vettore induzione dielettrica}$$

Equazioni generali con dielettrici

Scriviamo la legge di Gauss per il vettore induzione dielettrica:

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q + q_p}{\varepsilon_0}$$

$$\oint (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot \vec{u}_n d\Sigma = q$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\Phi(\vec{D}) = \oint \vec{D} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = q$$

il flusso di \vec{D} attraverso una superficie chiusa è uguale alla **somma delle cariche libere** contenute all'interno della superficie stessa

Si può scrivere

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0(\kappa - 1)\vec{E} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

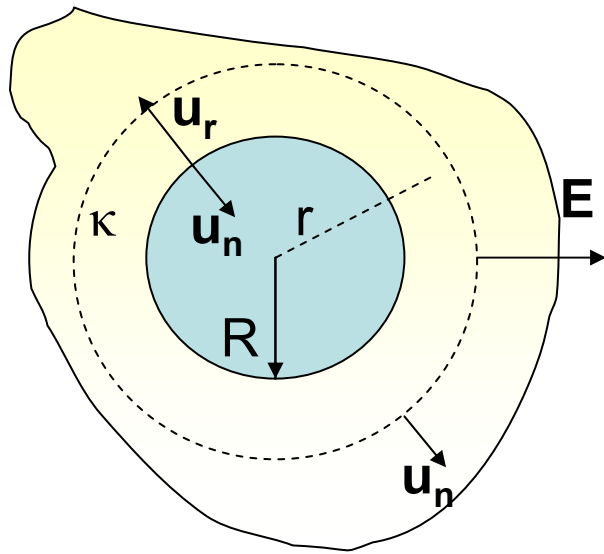
L'espressione locale della **legge di Gauss in presenza di dielettrici** è:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad \rho: \text{densità di carica libera}$$

$$\text{Unità di misura:} \quad [P]=[D]=C/m^2, \quad [\kappa]=[\chi]=1, \quad [\varepsilon]=F/m=C^2/Nm^2$$

Dielettrici - esempio

Una sfera conduttrice di raggio R , avente carica q , è immersa in un dielettrico indefinito di costante dielettrica κ . Determinare le espressioni in funzione di r dei vettori \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{P} e il valore della carica di polarizzazione q_p .



Se $r > R$

$$\Phi(\vec{\mathbf{D}}) = 4\pi r^2 D = q \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{D}}(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \vec{\mathbf{u}}_r$$

$$\vec{\mathbf{E}}(r) = \frac{\vec{\mathbf{D}}(r)}{\varepsilon} = \frac{q}{4\pi \varepsilon r^2} \vec{\mathbf{u}}_r$$

$$\vec{\mathbf{P}}(r) = \varepsilon_0(\kappa - 1)\vec{\mathbf{E}} = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} \frac{q}{4\pi r^2} \vec{\mathbf{u}}_r$$

Se $r = R$

$$\vec{\mathbf{P}}(R) = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} \frac{q}{4\pi R^2} \vec{\mathbf{u}}_r = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} \sigma \vec{\mathbf{u}}_r \quad \vec{\mathbf{u}}_r = -\vec{\mathbf{u}}_n$$

$$\Rightarrow \sigma_p = -P(R) = -\frac{(\kappa - 1)}{\kappa} \sigma \quad \Rightarrow \quad q_p = -\frac{\kappa - 1}{\kappa} q$$